Tutorien am 18. / 19. November

Aufgabe 1:
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (e^{2x} + y, \cos(xy))$ und $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\ln(t), -t^2)$. Berechne $f'(x,y)$ und $g'(t)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$ und überprüfe die Kettenregel.

Aufgabe 2:
Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \mathcal{D}$ und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(x_0) \neq 0$. Zeige

$$D(\frac{1}{f})(x_0) = \frac{1}{f(x_0)^2} Df(x_0).$$

Aufgabe 3:
Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Beweise die Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ über die (mehrdimensionale) Kettenregel.

Aufgabe 4:
(Polarkoordinaten)

(i) Es sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (r,\phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi).$$

Skizziere die Bildmengen der Geraden r =const. und ϕ =const.

(ii) Bestimme die Funktionalmatrix von g. Ist g differenzierbar? Berechne die Determinante von $g'(r,\phi)$.

(iii) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ und bestimme die Ableitung der Funktion $f \circ g$ im Punkt (r,ϕ). Interpretiere das Ergebnis.

(iv) Es sei $h : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $h(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$. Bestimme die Funktionalmatrizen von h und $h \circ g|_{\{(r,\phi)\in\mathbb{R}^2 \,|\, r\neq 0\}}$ und überprüfe die Kettenregel. Sind h und $h \circ g|_{\{(r,\phi)\in\mathbb{R}^2 \,|\, r\neq 0\}}$ differenzierbar?

Aufgabe 5:
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$. Skizziere den Graphen von f und verifiziere anschaulich, daß der Gradient z.B. am Punkt $(0,1)$ in die Richtung des stärksten Anstiegs zeigt. Bestimme die Niveauflächen $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_{-1}$ und $\mathcal{N}_{35}$ und verifiziere anschaulich, daß der Gradient senkrecht auf den Niveauflächen steht. Bestimme schließlich die Tangentialebenen an den Graphen von f in den Punkten $(1,0,f(1,0))$ und $(0,0,f(0,0))$.