Tutorien am 25. / 26. November

Aufgabe 1:
Bestimme das Taylorpolynom 2. Grades um den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ der Funktionen

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = ax + by, \\ g :&\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = x^2 + 2xy, \\ h :&(0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) = \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:
Diskutiere die notwendigen und hinreichenden Kriterien für lokale Extrema einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an den folgenden Beispielen:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2 + 2y^2, & f_2(x,y) &= x^2 - 2y^2, \\ f_3(x,y) &= x^2 & f_4(x,y) &= -x^2 - 2y^2, \\ f_5(x,y) &= x^2 \pm y^4. \end{aligned}$$

Aufgabe 3:
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $x_0 \in \overline{D}$ ist ein (globales) Minimum von f auf D, falls $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D$. (Entsprechend für (globale) Maxima.)
Diskutiere die Begriffe lokales und globales Extremum und die Verbindungen zwischen ihnen.
Bestimme alle lokalen und globalen Extrema der Funktionen

$$f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = xy.$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Aufgabe 4:
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine unbeschränkte, offene Menge und $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ stetig und auf D differenzierbar. Außerdem gelte $f(x_n) \to +\infty$ für $n \to \infty$ und für jede Folge $(x_n) \subset \overline{D}$ mit $\|x_n\| \to \infty$.
Zeige, daß f ihr Minimum in $\overline{D}$ annimmt.