Tutorien am 2. / 3. Dezember

Aufgabe 1:
Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (x^2 + y^2, \cos(y)), \quad g(x,y) = (x + y^3, \exp(x)).$$

Wo sind diese Funktionen lokal invertierbar. Sind sie global invertierbar auf $\mathbb{R}^2$ ohne die Stellen an denen sie nicht lokal invertierbar sind? Wie lauten die Ableitungen der lokalen Umkehrfunktionen?

Aufgabe 2:
Es seien $a, b > 0$ und $F : \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $F(r, \phi) = (ra\cos(\phi), rb\sin(\phi)$.
Skizziere das Bild von F für festes r.
Zeige, daß F überall lokal, aber nicht global invertierbar ist. Wie kann man den Definitions- und Wertebereich verändern, so daß F bijektiv wird?

Aufgabe 3:
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(u, v, w) = u^4 + 2u\cos(v) + \sin(w)$. Zeige, daß für hinreichend kleine u, v, w die Gleichung $f(u, v, w) = 0$ nach w aufgelöst werden kann und berechne für die Lösungsfunktion $w(u, v)$ die Ableitung am Punkt $(0, 0)$.

Aufgabe 4:
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (y - 1)^2 - x$. Skizziere die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$.
Überlege Dir erst anhand der Skizze, an welchen Punkten der Satz über implizite Funktionen anwendbar ist und beweise Deine Vermutung. Überlege Dir, was passiert, wenn man im Satz die Rollen von x und y vertauscht. Darf man das?

Aufgabe 5:
Bestimme die kritischen Punkte der Funktion $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ unter der Bedingung $y + 1 = x^2$ und überlege Dir, ob dies Extrema sind.