Tutorien am 9. / 10. Dezember

Aufgabe 1:
Skizziere die folgenden Kurven und gib möglichst einfache Parametrisierungen an. Bestimme, falls die Kurve rektifizierbar ist, jeweils die Kurvenlänge (die auftretenden Integrale sind nicht unbedingt elementar lösbar.)

(i) $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 1 + 2y = 1 + z, 0 \leq x \leq 2\}$.

(ii) $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (\frac{x}{a})^2 + (y - \lambda)^2 = r^2\}$, wobei $a \neq 0$, $\lambda, r \in \mathbb{R}$.

(iii) $C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = \lambda, 1 \leq y \leq 3\}$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2:
Zeige, daß die Länge des Einheitskreisbogens in $\mathbb{R}^2$ zwischen den Punkten $(1, 0)$ und $(\cos(\phi), \sin(\phi))$ gleich ϕ ist. (Stichwort: „Bogenmaß“)

Aufgabe 3:
Integriere die folgenden Vektorfelder jeweils über die angegene Kurve.

(i) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, v(x, y) = (e^x, \sin(\pi\, y/2))$,
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y^2, x \leq 1\}$.

(ii) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, v(x, y) = (y^3, x^3)$
$C = \{(t^a, t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in [0, 1]\}$, $a >$.

(iii) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, v(x, y) = (x + y, x + y^2)$
C sei ein beliebiger Weg zwischen $(0, 0)$ und $(1, 1)$. Parametrisiere mindestens zwei solcher Wege und berechne die entsprechenden Kurvenintegrale.

Aufgabe 4:
Wie aus der Vorlesung bekannt, sind zwei Wege $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ und $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^d$ *äquivalent*, falls es eine streng monoton wachsende, surjektive, stetige Funktion $\phi : [a, b] \to [c, d]$ gibt mit $\alpha = \beta \circ \phi$. Zeige, daß dies in der Tat eine Äquivalenzrelation definiert.

Aufgabe 5:
Es seien $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ und $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^d$ zwei Parametrisierungen derselben Kurve C. Gibt es eine bijektive, stetige Abbildung $\phi : [a, b] \to [c, d]$ und gilt $\alpha = \beta \circ \phi$, so sagen wir, daß α aus β durch die Parametertransformation ϕ hervorgeht.

Aus den Eigenschaften von ϕ folgt unmittelbar, daß ϕ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Im ersten Fall nennen wir die Parametertransformation *orientierungserhaltend*, im zweiten *orientierungsumkehrend*. Wir wollen weiterhin nur stetig differenzierbare Parametertransformationen betrachten.
Für einen regulären Weg α heißt $\alpha'(t)/|\alpha'(t)|$ *Tangenteneinheitsvektor*. Zeige, daß der Tangenteneinheitsvektor (nicht unbedingt jedoch der Tangentialvektor) unter orientierungserhaltenden Parametertransformationen invariant ist. Was passiert bei orientierungsumkehrenden Transformationen?
Sind α und β sogar stetig differenzierbar, so zeige, die Länge der Kurve invariant unter beliebigen Parametertransformationen ist.