Tutorien am 16. / 17. Dezember

Aufgabe 1:

(i) Zeige, daß konservative Vektorfelder rotationsfrei sind.

(ii) Zeige, daß für genügend glatte Vektorfelder $v : \mathbb{R}^3 \supset \mathcal{D} \to \mathbb{R}^3$ gilt $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$.

(iii) Bestimme Divergenz und Rotation des Vektorfeldes $v(x, y, z) = (xy, xyz, xze^y)$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2:
Integriere das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x, y, z) := (x, y, z)$ über der durch

$$c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) := (e^{t \sin(t)}, t^2 - 2\pi t, \cos(t/2))$$

parametrisierten Kurve.

Aufgabe 3:
Gegeben seien die Vektorfelder v, $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x, y) = (x^2 - y, y^2 + x), \quad w(x, y) = (x^3 - 3xy^2, y^3 - 3yx^2).$$

(i) Besitzen die Vektorfelder ein Potential?

(ii) Berechne die Integrale der beiden Vektorfelder zum einen über die durch

$$\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) := (t, t^2 + 1)$$

parametrisierten Kurve, zum anderen über die geradlinige Verbindung von $(0, 1)$ und $(1, 2)$ durch achsenparallele Geradenstücke.

Aufgabe 4:
Bestimme ein Potential des Vektorfeldes

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - xz, -xy).$$