Aufgabe 1:

(i) Es ist $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $f(t)=1$, $t \in [a,b]$ eine Treppenfkt., deshalb gilt unmittelbar mit der Definition:

$$\int_a^b 1 \, dx = 1 \cdot (b-a) = b-a.$$

(ii) Wie in der Übung: Wir betrachten die Folge von Treppenfunktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right) \mathbb{1}_{\left[a+\frac{(b-a)k}{n},\, a+\frac{(b-a)(k+1)}{n}\right)}.$$

Dann konvergiert $f_n \to f$ gleichmässig:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - f_n(t)| = \sup_{k=0,\dots,n-1} \ \sup_{t \in \left[a+\frac{(b-a)k}{n},\, a+\frac{(b-a)(k+1)}{n}\right)} \left| t - a - \frac{(b-a)k}{n} \right|$$

$$\leq \sup \ \sup \left| \frac{(b-a)(k+1)}{n} - \frac{(b-a)k}{n} \right| = \frac{b-a}{n} \longrightarrow 0.$$

Es gilt

$$I(f_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} a \frac{(b-a)}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^2}{n^2} k$$

$$= \frac{a(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k$$

$$= \frac{a(b-a)}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} + \frac{(b-a)^2}{n^{\cancel{2}}} \frac{(n-1)\cancel{n}}{2}$$

$$= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \frac{(n-1)}{n}.$$

Somit ist

$$\int_a^b x \, dx = \lim_{n\to\infty} I(f_n) = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

1 iii) Wir setzen z.B.:

$$f_n : [0, x] \to \mathbb{R},$$

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^2 \frac{k^2}{n^2} \cdot \mathbb{1}_{(x\frac{k}{n},\, x\frac{k+1}{n}]}.$$

Dann gilt: $\|f - f_n\|_\infty = \sup_{k=0,\dots,n-1} \sup_{t \in (x\frac{k}{n},\, x\frac{k+1}{n}]} \left| t^2 - x^2\frac{k^2}{n^2} \right|$

$$\leq \sup_{k=0,\dots,n-1} \left| \frac{x^2(k+1)^2}{n^2} - x^2\frac{k^2}{n^2} \right|$$

$$= \sup_{k=0,\dots,n-1} \left| \frac{x^2}{n^2}(2k+1) \right| = \frac{x^2}{n^2}(2(n-1)+1)$$

$$= \frac{x^2}{n^2}(2n-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Somit ist $\int_0^x t^2\,dt = \lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} x^2 \frac{k^2}{n^2} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = x^3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{x^3}{3}.$$

<u>Aufgabe 2</u>: Sei $f = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbb{1}_{I_k}$, wobei

$I_1, \dots, I_N \subset [a,b]$ paarweise disjunkte Intervalle und $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ sind.

(i) Sei $f(t) \geq 0 \ \forall t \in [a,b]$, d.h. $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, \dots, N$.

Somit ist $I(f) = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\alpha_k}_{\geq 0} \underbrace{\Delta(I_k)}_{\geq 0} \geq 0$,

denn es ist $\Delta(I_k)$ die Länge des Teilintervalls nicht negativ.

(ii) Es ist $\|f\|_\infty = \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_N|\}$, denn für $x \in I_k$ gilt: $|f(x)| = |\alpha_k| \leq \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_N|\}$.

Für $x \in [a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ ist $f(x) = 0 \leq \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_N|\}$.

Somit folgt insgesamt:

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| = \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_N|\}.$$

Und damit folgt:

$$|I(f)| = \left| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \Delta(I_k) \right| \leq \sum_{k=1}^{N} \underbrace{|\alpha_k|}_{\leq \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_N|\} = \|f\|_\infty} \Delta(I_k)$$

$$\leq \|f\|_\infty \sum_{k=1}^{N} \Delta(I_k) = \|f\|_\infty (b-a).$$

(iii) Folgt aus (i), indem wir (i) auf die Funktion $f-g$ anwenden und die Linearität von I ausnutzen.

<u>Aufgabe 3</u>: Nein: Sei $x_0 \in [0,1)$ bel.,

wir betrachten z.B. den Fall $x_0 \in \mathbb{Q}$.

Dann gibt es Folgen $(x_n) \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$ und

$(y_n) \subset [0,1] \cap \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit

$x_n \longrightarrow x_0$ und $y_n \longrightarrow x_0$ und z.B. $x_n, y_n \geq x_0$, $n \in \mathbb{N}$.

Damit gilt nun: $f(x_n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$f(y_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

also $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

Somit existiert der rechtsseitige Grenzwert in x_0 nicht und f kann keine Regelfkt. sein.

<u>Aufgabe 4</u>: Das ist falsch. Betrachte

z.B. $[a,b] = [0,2]$, $f(t) = 3 \quad \forall t \in [0,2]$,

$g(t) = 5 \quad \forall t \in [0,2]$.

Dann gilt: $\int_a^b f(t) g(t) \, dt = \int_0^2 3 \cdot 5 = 30$, aber

$\int_0^2 3 \, dx \int_0^2 5 \, dx = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 60$.

Aufgabe 5: Da $f: [-a, a] \to \mathbb{R}$ eine Regelfkt. ist, so auch insbesondere

$$g: [0, a] \to \mathbb{R}, \quad g(t) = f(t).$$

Sei (g_n) eine Folge von Treppenfkt. mit

$$\|g_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Es ist also $I(g) = \int_0^a f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} I(g_n)$.

Wir setzen $h: [-a, 0] \to \mathbb{R}$, $h(t) = f(t) = -f(-t) = -g(-t)$.

und $h_n: [-a, 0] \to \mathbb{R}$, $h_n(t) = -g_n(-t)$.

Dann ist (h_n) eine Folge von Treppenfunktionen und es gilt:

$$\|h_n - h\|_\infty = \sup_{t\in[-a,0]} |h_n(t) - h(t)| = \sup_{t\in[-a,0]} |-g_n(-t) + g(-t)|$$

$$= \sup_{\tilde{t}\in[0,a]} |g(\tilde{t}) - g_n(\tilde{t})| = \|g - g_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Also ist $\int_{-a}^0 f(t)\,dt = I(h) = \lim_{n\to\infty} I(h_n)$.

Nun gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: Sei $g_n = \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_k \mathbb{1}_{I_k}$,

also $h_n = \sum_{k=1}^{m_n} (-\alpha_k) \mathbb{1}_{-I_k}$ und

$$I(h_n) = \sum_{k=1}^{m_n} (-\alpha_k)\, \Delta(-I_k) = -\sum_{k=1}^{m_n} \alpha_k\, \Delta(I_k) = -I(g_n),$$

also

$$I(h) = \lim_{n\to\infty} I(h_n) = -\lim_{n\to\infty} I(g_n) = -I(g),$$

woraus die Behauptung folgt.

Alternativ natürlich (was allerdings noch nicht in der VL) über Substitution.