Aufgabe 1:

(i)
$$\int_{[0,1]^2} f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 xy + y^2 \, dx \, dy$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2 y}{2} + y^2 x \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{y}{2} + y^2 \, dy$$
$$= \left(\frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} .$$

oder
$$\int_{[0,1]^2} f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 xy + y^2 \, dy \, dx = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \, dx = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} .$$

(ii)
$$\int_{[0,a]\times[0,b]} x e^{xy} \, d(x,y) = \int_0^a \int_0^b x e^{xy} \, dy \, dx = \int_0^a x \int_0^b e^{xy} \, dy \, dx$$
$$= \int_0^a x \, \frac{e^{xy}}{x} \Big|_{y=0}^{y=b} dx = \int_0^a e^{bx} - 1 \, dx = \left(\frac{1}{b} e^{bx} - x \right) \Big|_0^a$$
$$= \frac{e^{ba}}{b} - a - \frac{1}{b} .$$

oder
$$\int_{[0,a]\times[0,b]} x e^{xy} \, d(x,y) = \int_0^b \int_0^a x e^{xy} \, dx \, dy = \int_0^b \left(x \frac{e^{xy}}{y} \Big|_{x=0}^{x=a} - \frac{1}{y} \int_0^a e^{xy} \, dx \right) dy$$
$$= \int_0^b \left(\frac{a e^{ay}}{y} - \frac{e^{ay}}{y^2} + \frac{1}{y^2} \right) dy = \dots .$$

Aufgabe 3:

Sei $\varphi = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{R_i}$, wobei

R_i eine Rasterung von $Q_0 \cup Q_1$ ist,

d.h. $R_i \cap R_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i=1}^{N} R_i = Q_0 \cup Q_1$.

Somit gibt es $I \subset \{1, \dots, N\}$ mit

$$\bigcup_{i \in I} R_i = Q_0 \quad \text{und} \quad \bigcup_{i \in \{1,\dots,N\} \setminus I} R_i = Q_1.$$

Damit ist $\varphi = \underbrace{\sum_{i \in I} c_i \mathbb{1}_{R_i}}_{\varphi_0} + \underbrace{\sum_{i \in \{1,\dots,N\} \setminus I} c_i \mathbb{1}_{R_i}}_{\varphi_1}$,

und $\int_{Q_0 \cup Q_1} \varphi \, dx = \sum_{i=1}^{N} c_i V(R_i) = \sum_{i \in I} c_i V(R_i) + \sum_{i \in \{1,\dots,N\} \setminus I} c_i V(R_i)$

$$= \int_{Q_0} \varphi \, dx + \int_{Q_1} \varphi \, dx.$$

Aufgabe 3: Sei (φ_n) eine Folge von TF mit $\|f-\varphi_n\|_\infty \to 0$, $\varphi_n = \sum_{i=1}^{N_n} c_i^n \mathbb{1}_{Q_i^n}$

(i) Dann ist $(\alpha\varphi_n)$ eine Folge von TF und $\|\alpha\varphi_n - \alpha f\|_\infty = |\alpha|\,\|\varphi_n - f\|_\infty \to 0$, und für eine TF gilt:

$$\int_Q \alpha\varphi_n dx = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha c_i^n V(Q_i^n) = \alpha \sum_{i=1}^{N_n} c_i^n V(Q_i^n)$$

$$= \alpha \int_Q \varphi_n dx$$

Also folgt
$$\int_Q \alpha f\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_Q \alpha\varphi_n\, dx = \lim_{n\to\infty} \alpha \int_Q \varphi_n\, dx$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} \int_Q \varphi_n\, dx = \alpha \int_Q f\, dx.$$

(ii) Angenommen $f(x) \geq 0$ $\forall x \in Q$, aber $\int_Q f(x)\,dx < 0$, also $a := \lim_{n\to\infty} \int_Q \varphi_n\, dx < 0$, d.h. $\exists N > 0$:

$$\frac{a}{2} > \int_Q \varphi_n\, dx = \sum_{i=1}^{N_n} c_i^n \underbrace{V(Q_i^n)}_{\geq 0} \quad \forall n \geq N,$$

d.h. es gibt $i(n) \in \{1,\dots,N_n\}$ mit $c_{i(n)}^n < \frac{a}{2V(Q)}$, denn sonst wäre
$$\sum_{i=1}^{N_n} c_i^n V(Q_i^n) \geq \sum_{i=1}^{N_n} \frac{a}{2V(Q)} V(Q_i^n) = \frac{a}{2V(Q)} \cdot V(Q) = \frac{a}{2}\ \text{↯}.$$

~~Da~~ Wegen $f(x) \geq 0$ $\forall x \in Q$ ist also

$$\|f-\varphi_n\|_\infty = \sup_{x\in Q} |f(x) - \varphi_n(x)| \geq \sup_{x \in Q_{i(n)}^n} |\underbrace{f(x)}_{\geq 0} - \overbrace{\varphi_n(x)}^{= c_{i(n)}^n}|$$

$$\geq \sup_{x\in Q_{i(n)}^n} |0 - c_{i(n)}^n| > \frac{|a|}{2V(Q)} > 0 \quad \forall n \geq N \quad \text{↯}.$$

(iii) Sei f stetig und $\int_Q |f|\,dx = 0$.

Ang. $\exists x_0 \in Q$ mit $a := |f(x_0)| > 0$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$: $|f(x)| > \frac{a}{2}$ $\forall x \in B(x_0, \varepsilon)$.

Wegen $\| |f| - |\varphi_n| \|_\infty \to 0$ gibt es $N > 0$:

$\| |f| - |\varphi_n| \|_\infty = \sup_{x \in Q} \big| |f(x)| - |\varphi_n(x)| \big| < \frac{a}{4}$ $\forall n \geq N$

Sei $\tilde{Q}$ ein bel. Quader mit $\tilde{Q} \subset B(x_0, \varepsilon)$ und $V(\tilde{Q}) > 0$.

Dann ist $\tilde{\varphi} = \frac{a}{4} \mathbb{1}_{\tilde{Q}}$ eine TF und für alle $n > N$ gilt:

$x \notin \tilde{Q}$: $\tilde{\varphi}(x) = 0 \leq |\varphi_n(x)|$.

$x \in \tilde{Q}$: $\tilde{\varphi}(x) = \frac{a}{4} = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} < \big| |f(x)| - |\varphi_n(x)| \big| - |f(x)|$

$< \big| |f(x)| - |\varphi_n(x)| - |f(x)| \big| = |\varphi_n(x)|$,

also $\tilde{\varphi}(x) \leq |\varphi_n(x)|$ $\forall x \in Q$ und $n > N$,

also $\int_Q \tilde{\varphi}(x)\,dx \leq \int_Q |\varphi_n(x)|\,dx$ $\forall n > N$.

$\int_Q \tilde{\varphi}(x)\,dx = \frac{a}{4} V(\tilde{Q}) > 0$

Damit ist auch $\int_Q |f(x)|\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_Q |\varphi_n(x)|\,dx \geq \frac{a}{4} V(\tilde{Q}) > 0$ ↯.

Gegenbsp. für nicht stetige Fkt. ...

Aufgabe 9:

Es ist für alle $x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$:

$$\int_{[1,\infty)} \frac{y}{x^3}\, dy = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{y}{x^3}\, dy = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2x^3} y^2 \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{b^2-1}{2x^3} = \pm\infty,$$ also

existiert dieses (uneigentl.) Integral ~~und~~ nicht.

Im zweiten Fall ist

$$\int_{(-\infty,-1]\cup[1,\infty)} \frac{y}{x^3}\, dx = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \left(\int_a^{-1} \frac{y}{x^3}\, dx + \int_1^b \frac{y}{x^3}\, dx \right)$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} -\frac{y}{2} \left(\frac{1}{x^2}\Big|_a^{-1} + \frac{1}{x^2}\Big|_1^b \right)$$

$$= -\frac{y}{2} \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - 1 \right) = 0 \quad \forall y \geq 1.$$

Also ist

$$\int_{[1,\infty)} \int_{(-\infty,-1]\cup[1,\infty)} \frac{y}{x^3}\, dx\, dy = \lim_{b\to\infty} \int_1^b 0\, dy = \underline{\underline{0}}.$$