Aufgabe 1:

(i) Mit $\Omega_0 = (-\pi, \pi)$, $g, h : \Omega_0 \to \mathbb{R}$,

$g(x) = \sin(x) - 1$

$h(x) = \sin(x) + 1$

folgt

$$\int_{\Omega} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\Omega_0} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy\, dx =$$

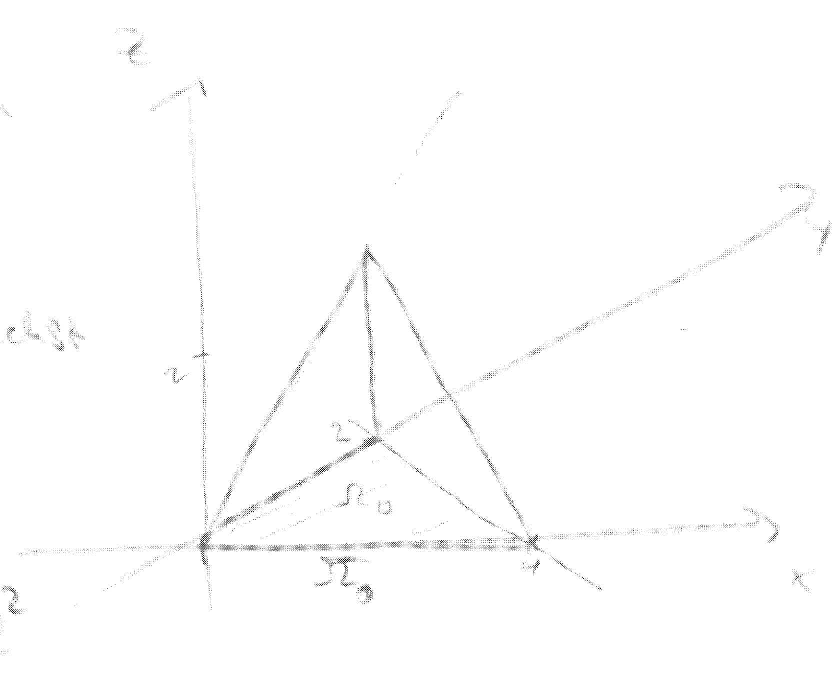
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sin(x)-1}^{\sin(x)+1} xy \, dy \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{xy^2}{2} \Bigg|_{y=\sin(x)-1}^{y=\sin(x)+1} dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \Big(\underbrace{\underbrace{(\sin(x)+1)^2}_{\sin^2(x)+2\sin(x)+1} - \underbrace{(\sin(x)-1)^2}_{\sin^2(x)-2\sin(x)+1}}_{4\sin(x)} \Big) dx$$

$$= 2 \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x)\, dx = 2 \Big(\underbrace{-x\cos(x) \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=2\pi} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\, dx}_{=0} \Big)$$

$$\hat{=}\ \underline{\underline{4\pi}}$$

(ii) Es sei Q der von den vier Flächen begrenzte Körper.
Wir schreiben zunächst $\Omega_0 =$ die von den Kurven $x = 0$, $y = 0$ und $x + 2y = 4$ begrenzte Fläche in $\mathbb{R}^2$



und $g(x,y) = 0$, $h(x,y) = y$, $(x,y) \in \Omega_0$.

Dann ist $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \Omega_0 \text{ und } g(x,y) < z < h(x,y)\}$

und $\int_\Omega 1 \, d(x,y,z) = \int_{\Omega_0} \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} 1 \, dz \, d(x,y)$.

Ebenso verfahren wir nun mit Ω_0:

Wir schreiben $\overline{\Omega_0} = (0,4)$ und

$\overline{g}, \overline{h} : \overline{\Omega_0} \to \mathbb{R}$,

$\overline{g}(x) = 0$, $\overline{h}(x) = 2 - \frac{x}{2}$.

Dann ist $\Omega_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \overline{\Omega_0} \text{ und } \overline{g}(x) < y < \overline{h}(x)\}$

und $\int_{\Omega_0} f(x,y) \, d(x,y) = \int_{\overline{\Omega_0}} \int_{\overline{g}(x)}^{\overline{h}(x)} f(x,y) \, dy \, dx$

für jede int. (stetige) Fkt f.

Insgesamt also

$$\int_\Omega 1 \, d(x,y,z) = \int_{\Omega_0} \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} 1 \, dz \, d(x,y) = \int_{\Omega_0} h(x,y) - g(x,y) \, d(x,y)$$

$$= \int_{\Omega_0} y \, d(x,y) = \int_{\overline{\Omega_0}} \int_{\overline{g}(x)}^{\overline{h}(x)} y \, dy \, dx = \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} y \, dy \, dx$$

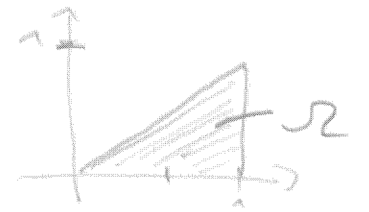
$$= \int_0^4 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2-\frac{x}{2}} dx = \int_0^4 \frac{1}{2}\left(2 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \int_0^4 2 - x + \frac{x^2}{8} \, dx$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{24} \Big|_0^4 = 8 - 8 + \frac{64}{24} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$

Aufgabe 2:

(i) Wir schreiben $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < x\}$.
Dann ist
$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_\Omega f(x,y)\,d(x,y)$$

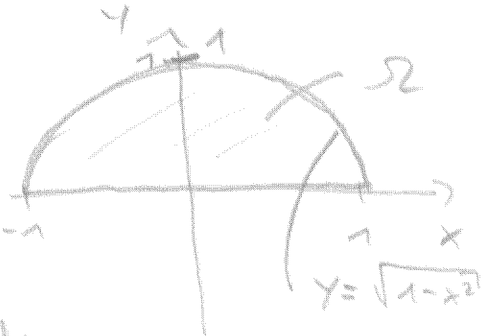
Wir können nun umgekehrt Ω auch in der Form schreiben:



$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{0 < y < 1}_{\Omega_0},\ \underset{g(y)}{y} < x < \underset{h(y)}{1}\}$$

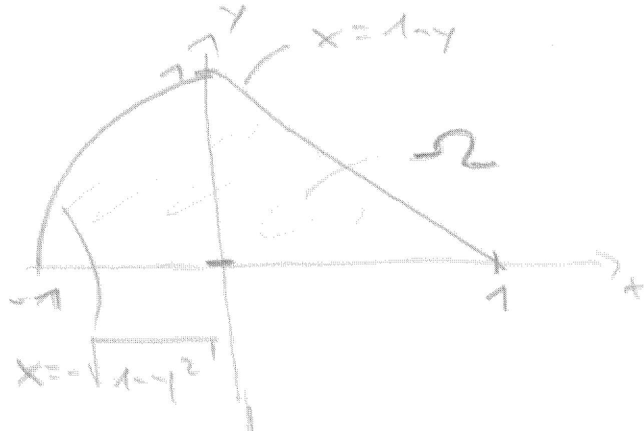
und somit
$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_\Omega f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy.$$

(ii) Wir schreiben



$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1, -\sqrt{1-y^2} < x < \sqrt{1-y^2}\},$$
also
$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

(iii) Hier ist die obere Grenze „zusammengesetzt":



$h : (-1,1) \to \mathbb{R}$,
$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } -1 < x < 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$
h ist stetig.

Wir schreiben $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1,\ 0 < y < h(x)\}$
also
$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 \int_0^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

Aufgabe 3:

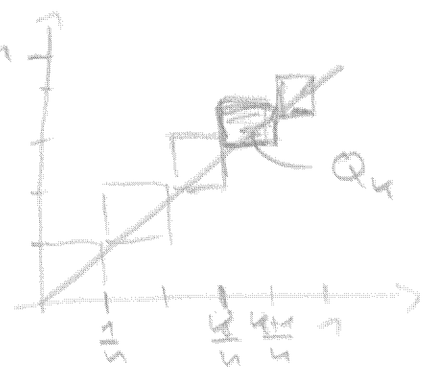
(i) Sei Q ein solcher Quader und $\varepsilon > 0$ bel.
Offenbar können wir Q mit Q selbst überdecken und da $V(Q) = 0 < \varepsilon$ ist, ist Q eine Nullmenge.

(ii) Sei N eine Nullmenge und $M \subset N$.
Sei $\varepsilon > 0$ bel. und $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Quadern mit $N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} V(Q_k) < \varepsilon$.
Wegen $M \subset N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ folgt sofort, daß auch M eine Nullmenge ist.

(iii) Für jedes $x \in [0,1]$ haben wir in der Übung gesehen, daß $\{x\} \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge ist.
Nun gilt für die überabz. Vereinigung
$\bigcup_{x \in [0,1]} \{x\} = [0,1]$ und $[0,1]$ ist keine Nullmenge
(letzteres haben wir bislang noch nicht gezeigt ...)

(iv) Sei $\varepsilon > 0$ bel. und n so groß, daß $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Wir definieren

$$Q_k := \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \quad k = 0, \dots, n-1.$$



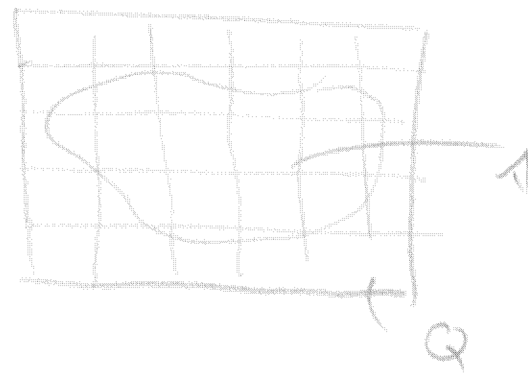
Dann ist

$$N \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} Q_k$$

und $\sum_{k=0}^{n-1} V(Q_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon$

Aufgabe 4: Sei $\varepsilon > 0$ bel.

Da A kompakt ist, gibt es einen Quader Q mit $A \subset Q$. oBdA $V(Q) > 0$.



Da f unif. glm. stetig ist, gibt es $\delta > 0$:

$|f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{V(Q)}$, falls $|x - \tilde{x}| < \delta$.

Wir unterteilen Q in so kleine Quader Q_k, $k = 1, ..., N$, daß der Durchmesser von Q_k kleiner als δ ist.

Somit gilt für $x, \tilde{x} \in Q_k$: $|f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{V(Q)}$.

Sei $I = \{k \in \{1, ..., N\} \mid A \cap Q_k \neq \emptyset\}$

Für $k \in I$ gilt: Da $A \cap Q_k$ komp. ist, nimmt f auf $A \cap Q_k$ ~~Minimum~~ m_k und Maximum M_k an und es gilt $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{V(Q)}$.

Wir setzen $R_k = Q_k \times [m_k, M_k]$.

Dann ist offenbar $gr(f) \subset \bigcup_{k \in I} R_k$ und

$$\sum_{k \in I} V(R_k) \leq \sum_{k \in I} V(Q_k) \cdot \frac{\varepsilon}{V(Q)} \leq \frac{\varepsilon}{V(Q)} \cdot \sum_{k=1}^{N} V(Q_k) = \frac{\varepsilon}{V(Q)} \cdot V(Q) = \varepsilon$$