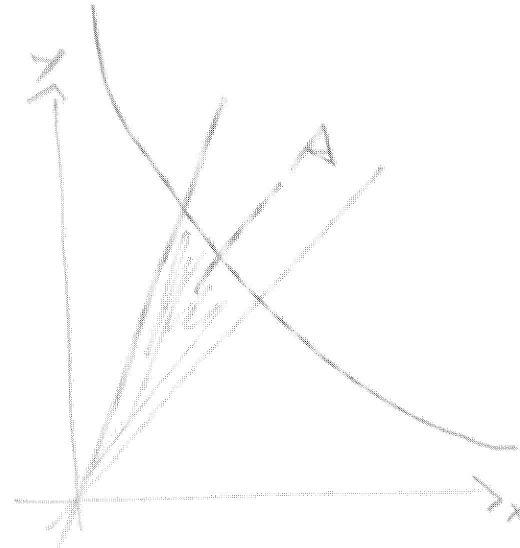
Aufgabe 1:



(i) Wir setzen
$$g : \Omega \to A,$$
$$g(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}} \\ \sqrt{st} \end{pmatrix}.$$

Es gilt also die Bijektion
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(s,t) = \begin{pmatrix} \sqrt{s}/\sqrt{t} \\ \sqrt{st} \end{pmatrix}$$ oder andersherum $$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y/x \end{pmatrix}.$$ $(x,y>0)$

Es ist also $\binom{x}{y} = g(s,t) \in A$ gdw. $0 < \underbrace{xy}_{=s} < 3$, $1 < \underbrace{\tfrac{y}{x}}_{=t} < 2$,

also falls $(s,t) \in \Omega := (0,3) \times (1,2)$ ist.

Mit dem Transformationssatz (wir haben uns zuvor überzeugt, daß die Voraussetzungen erfüllt sind) folgt:

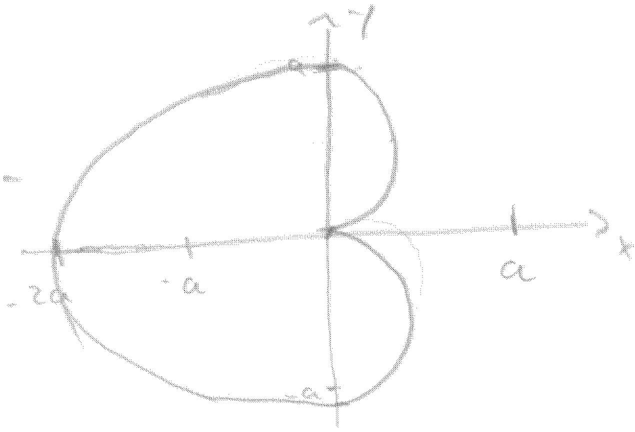
$$\int_A y^2 \, d(x,y) = \int_\Omega st \, |\det g'(s,t)| \, d(s,t).$$

Es ist $$|\det g'(s,t)| = \left|\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{st}} & -\frac{\sqrt{s}}{2(\sqrt{t})^3} \\ \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{s}} & \frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2t}}}.$$

Also $$\int_A y^2 \, d(x,y) = \int_\Omega st \cdot \frac{1}{2t} \, d(s,t) = \int_0^3 \int_1^2 \frac{s}{2} \, dt \, ds = \frac{1}{2} \int_0^3 s \, ds =$$
$$= \frac{1}{4} s^2 \Big|_0^3 = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$$

(ii)

Mit dem Transformations-Satz:



$$V(A) = \int_A 1 \, d(x,y) =$$

$$= \int_{\tilde{U}} 1 \, |\det g'(r,\varphi)| \, d(r,\varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{a(1-\cos\varphi)} r \, dr \, d\varphi$$

Damit g eine zulässige Parametertransformation ist, müssen wir g auf $\tilde{U} = \{(r,\varphi) \mid \varphi \in [0,2\pi], 0 \le r \le a(1-\cos\varphi)\}$ einschränken (Injektivität!)

$$V(A) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1-\cos\varphi)^2 d\varphi.$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{3\pi a^2}{2}}}$$

Aufgabe 2:

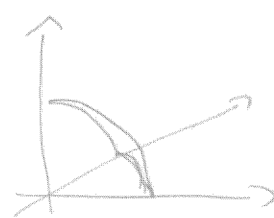
(i) Kugelkoordinaten:

$$\Omega' = \overline{B}(0,1),$$
$$\Omega = [0,1] \times [0,2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2],$$
$$g(r,\varphi,\vartheta) = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Dann (Übung): $|\det g'(r,\varphi,\vartheta)| = r^2 \cos\vartheta$,
also mit dem Trafosatz:

$$V(\overline{B}(0,1)) = \int_{\Omega'} d(x,y,z) = \int_{\Omega} r^2 \cos\vartheta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2 r^2 \, d\varphi \, dr = 4\pi \int_0^1 r^2 \, dr$$
$$= \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}}$$

(ii) Es ist



$$V(A) = \frac{1}{8} \cdot V(B(0,1)) = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$$

Wir berechnen die x-Koordinate des Schwerpunktes durch Kugelkoordinaten:

$\Omega = [0,1) \times (0, \pi/2) \times (0, \pi/2)$, g wie oben. Dann
$A = g(\Omega)$,
und g ist inj. auf Ω.

$$\bar{x} = \frac{1}{V(A)} \int_A x \, d(x,y,z) = \frac{6}{\pi} \int_{\Omega} r\cos\varphi\cos\vartheta \cdot r^2 \cos\vartheta \, d(r,\varphi,\vartheta) =$$
$$= \frac{6}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r^3 \cos\varphi \cos^2\vartheta \, d\varphi \, dr \, d\vartheta = \frac{6}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \cos^2\vartheta \sin\varphi \Big|_0^{\pi/2} dr \, d\vartheta$$
$$= \frac{6}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \cos^2\vartheta \, dr \, d\vartheta = \frac{6}{\pi \cdot 4} \int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta \, d\vartheta = \frac{3}{2\pi} \left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\sin 2\vartheta}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = 3/8$$

Die anderen Schwerpunktkoordinaten berechnen sich ganz analog zu $\bar{y} = \frac{3}{8} = \bar{z}$.

(iii) Wie (i): Wir verzerren die Kugelkoordinaten zu „Ellipsenkoordinaten":

$$\Omega := [0,1] \times [0,2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2],$$

$$g(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\,a\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\,b\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\,c\sin\vartheta \end{pmatrix},$$

dann ist $|\det g'(r,\varphi,\vartheta)| = \ldots = abc\, r^2\cos\vartheta$.

Also ist

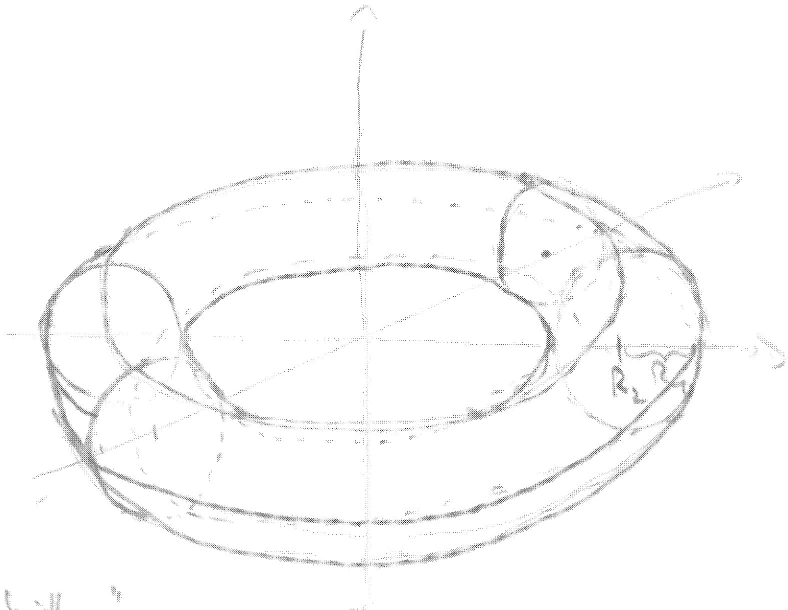
$$V(E) = \int_E 1\, d(x,y,z) = \int_\Omega 1 \cdot abc\, r^2 \cos\vartheta\, d(r,\varphi,\vartheta)$$

$$= abc \underbrace{\int_\Omega r^2 \cos\vartheta\, d(r,\varphi,\vartheta)}_{\overset{\text{s.o.}}{=} \frac{4\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} abc$$

Aufgabe 3:

Wir verwenden folgende an Kugelkoordinaten angelehnte Transformation:

$$g(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\,(R_2 + r\cos\vartheta) \\ \sin\varphi\,(R_2 + r\cos\vartheta) \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$



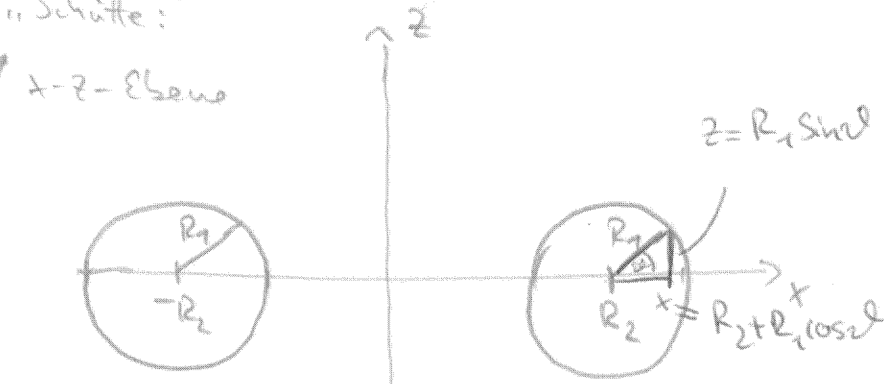
und $\Omega := [0, R_1] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$,

dann ist $T = g(\Omega)$.

Es ist weiterhin:

$|\det g'(r,\varphi,\vartheta)| = r(R_2 + r\cos\vartheta)$,

„Schnitte:“



also

$$V(T) = \int_T 1 \, d(x,y,z) =$$

$$\int_0^{R_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R_2 + r\cos\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{R_1} (R_2 r - r^2 \sin\vartheta)\Big|_0^{2\pi} dr$$

$$= 4\pi^2 R_2 \int_0^{R_1} r\, dr = \underline{\underline{2\pi^2 R_2 R_1^2}}$$