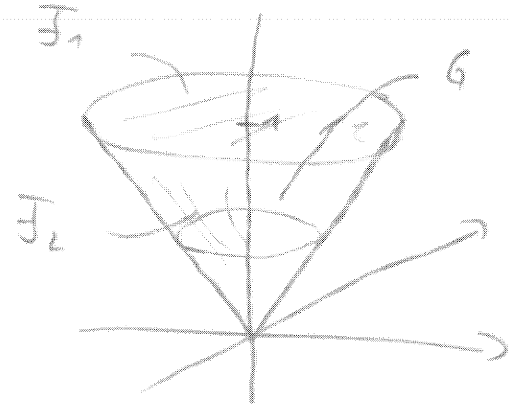
Aufgabe 1:



(a) Zum einen ist

$\operatorname{div} v(x,y,z) = 0 + 1 + x = 1 + x$,

und mit der Koordinatentransf.

$g: \{(r,\varphi,z) \mid 0 \le z \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le z\} \to \mathbb{R}^3$

$g(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$, also $|\det g(r,\varphi,z)| = r$

folgt $\displaystyle\int_G \operatorname{div} v(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^z (1 + r\cos\varphi) \cdot r \, dr\, d\varphi\, dz$

$\displaystyle = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{3} r^3 \cos\varphi\right)\Big|_{r=0}^{r=z} d\varphi\, dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}\cos\varphi \, d\varphi\, dz$

$\displaystyle = \int_0^1 \pi z^2 + \underbrace{\frac{z^3}{3} \sin\varphi\Big|_0^{2\pi}}_{=0} dz = \frac{\pi}{3} z^3 \Big|_0^1 = \underline{\underline{\pi/3}}$

Zum anderen ist $\partial G = F_1 \cup F_2$ mit

$F_1 = \{(x,y,1) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, param. durch

$P_1 : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $P_1(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$,

also $N(P_1(r,\varphi)) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$,

zeigt nach „außen",

und $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1,\ x^2 + y^2 = z^2\}$, param.

durch $P_2 : [0,2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $P_2(\varphi,z) = \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$,

also $N(P_2(\varphi,z)) = \begin{pmatrix} -z\sin\varphi \\ z\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ -z \end{pmatrix}$

zeigt nach „außen".

Damit ist $\int\limits_{\partial G} \langle v, n \rangle \, dO = \int\limits_{F_1} \langle v, n \rangle \, dO + \int\limits_{F_2} \langle v, n \rangle \, dO$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1^2 \\ r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} d\varphi \, dr + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} z^2 \\ z\sin\varphi \\ z^2\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ -z \end{pmatrix} dz \, d\varphi$$

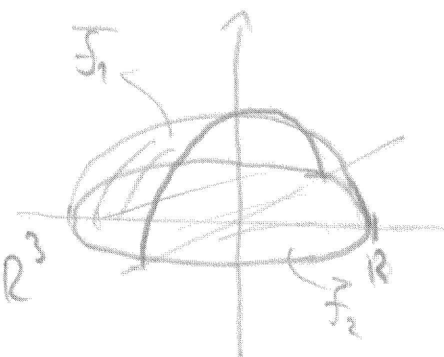
$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos\varphi \, d\varphi \, dr + \int_0^{2\pi} \int_0^1 z^2 \sin^2\varphi \, dz \, d\varphi$$

$$= \int_0^1 \underbrace{r^2 \sin\varphi \Big|_0^{2\pi}}_{=0} dr + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{\pi/3}}$$

(cc) Es ist $\operatorname{div} v(x,y,z) = 1$,

also $\int\limits_G \operatorname{div} v(x,y,z) \, d(x,y,z) = V(G)$,



da die volle Kugel das Volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$ hat, so ist also $V(G) = \underline{\underline{\frac{2}{3}\pi R^3}}$.

Zum anderen ist $\partial G = F_1 \cup F_2$,

$F_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = R^2, \ 0 \le z\}$, param. durch

$P_1 : [0, 2\pi] \times [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$, $P_1(\varphi, \vartheta) = R \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$,

also $N(P_1(\varphi,\vartheta)) = 1 \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\cos\vartheta \\ R\cos\varphi\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\cos\varphi\sin\vartheta \\ -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$

$$= R^2 \cos\vartheta \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

zeigt nach außen.

und $S_2 = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$, param. durch

$P_2 : [0,R] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $P_2(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$,

also $N(P_2(r,\varphi)) = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$

zeigt nach außen.

Damit ist

$$\int_{\partial G} \langle v, n \rangle \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\cos\vartheta \\ R\cos\varphi\cos\vartheta \\ 1 + R\sin\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \cdot R^2\cos\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$+ \int_0^R \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} * \\ * \\ 1+0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R^2 \cos\vartheta \sin\vartheta + R^3 \sin^2\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi + \int_0^R \int_0^{2\pi} -r \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} \sin^2\vartheta \Big|_0^{\pi/2} + R^3 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta}_{\underset{\substack{t = \sin\vartheta \\ dt = \cos\vartheta \, d\vartheta}}{=} \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}} \, d\varphi - 2\pi \cdot \int_0^R r \, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{3} \, d\varphi - \pi R^2 = \pi R^2 + \frac{2\pi}{3} R^3 - \pi R^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{2\pi}{3} R^3}}$$

Aufgabe 2:

(1) Es ist mit $v(x) = x$: $\operatorname{div} v(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^{d} 1 = d$,

also $\int_{\partial G} x \cdot n \, d\sigma = \int_G \operatorname{div} v(x) \, dx = \int_G d \, dx = d\,V(G)$.

(2) Mit (1) folgt $V(B_R) = \frac{1}{3} \int_{S_R} x \cdot n \, d\sigma$.

Parametrisieren S_R richtig durch

$p : [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$,

$p(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta \\ R\sin\varphi\cos\vartheta \\ R\sin\vartheta \end{pmatrix}$, also

$N(p(\varphi,\vartheta)) = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\cos\vartheta \\ R\cos\varphi\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\cos\varphi\sin\vartheta \\ -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix} = R^2\cos\vartheta \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$,

also $|N(p(\varphi,\vartheta))| = R^2\cos\vartheta$, also

$n(p(\varphi,\vartheta)) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} = \frac{1}{R} p(\varphi,\vartheta)$,

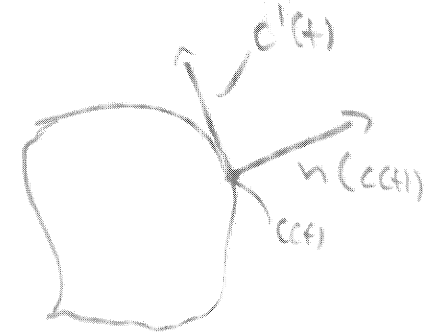
also $\int_{S_R} x \cdot n \, d\sigma = \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{p(\varphi,\vartheta) \cdot p(\varphi,\vartheta)}_{= |p(\varphi,\vartheta)|^2 = R^2} R^2 \cos\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$

$= R \int_{S_R} 1 \, d\sigma = A(S_R) R$

Aufgabe 3:

-1- Mit dem Satz von Gauß ist

$$\int_G \underbrace{\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)}_{= \operatorname{div}\binom{q}{-p}(x,y)} d(x,y) = \int_{\partial G} \binom{q}{-p} \cdot n \, do .$$



Sei $\partial G = \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{F}_i$,

$\mathcal{F}_i$ param. durch $c_i : M_i \to \mathbb{R}^2$, $M_i \subset \mathbb{R}$.

Dann ist $\mathcal{F}_i$ eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ mit Tangentialvektor an den Punkt $c_i(t)$ gegeben durch $c_i'(t) = \begin{pmatrix} c_i^{1\prime}(t) \\ c_i^{2\prime}(t) \end{pmatrix}$.

Es ist dann $N(c_i(t)) := \begin{pmatrix} c_i^{2\prime}(t) \\ -c_i^{1\prime}(t) \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor an $\mathcal{F}_i$ im Punkt $c_i(t)$. Und zwar gilt: Ist $N(c_i(t))$ der äußere Normalenvektor, so wird $\mathcal{F}_i$ im math. pos. Sinn durchlaufen. Es folgt also

$$\int_{\partial G} \binom{q}{-p} \cdot n \, do = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{F}_i} \binom{q}{-p} \cdot n \, do = \sum_{i=1}^{N} \int_{M_i} \begin{pmatrix} q(c_i(t)) \\ -p(c_i(t)) \end{pmatrix} \cdot N(c_i(t)) \, dt$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{M_i} \begin{pmatrix} q(c_i(t)) \\ -p(c_i(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_i^{2\prime}(t) \\ -c_i^{1\prime}(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{M_i} v \cdot c_i'(t) \, dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{F}_i} v \, d\vec{s} = \int_{\partial G} v \, d\vec{s} .$$

-B- z.B.:

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} p(x,y) \\ q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

oder $v(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

oder $v(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ . . .

-C- Mit $v(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ gilt also

$$A(Ast) = \int_G 1 \, d(x,y) = \int_{\partial G} v \, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^3 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * \\ 3\sin^2 t \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t \, dt = \frac{3}{192}\Big(12t + 3\sin(2t) - 3\sin(4t) - \sin(6t)\Big)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3}{192} 24\pi = \underline{\underline{\frac{3}{8}\pi}}$$