Aufgabe 1:

Mit der Definition ist zu zeigen, daß es eine stetige Funktion $r: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt und eine lineare Abb. $M: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, so daß mit $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + M(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\| \quad \text{und} \quad r(x_0) = 0.$$

Es ist $f(x_0) = f(0) = A \cdot 0 + 0 \cdot \varphi(0) = 0$,

$$f(x) = Ax + x\varphi(x), \text{ also}$$

Setzen wir also $M = A$ und

$$r(x) = \frac{x\varphi(x)}{|x|} \text{ für } x \neq 0, \quad r(0) = 0.$$

Dann gilt: $|r(x)| = |\varphi(x)| \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = r(0)$,

also ist r stetig.

und somit f in 0 diffbar mit

$$f'(0) = A.$$

__Aufgabe 2__: kritische Punkte:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x\,(y^2-1) \\ 2y\sin x \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also $\cos x\,(y^2-1) = 0$
und $\sin x \cdot y = 0$,

also (1) $y=0$, dann muß $\cos x = 0$ sein,
also $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

(2) $y = \pm 1$, also $y^2 = 1$, dann muß
$\sin x = 0$ sein, also
$x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

es gibt also die kritischen Punkte
$(\pi/2 + k\pi, 0)$, $(k\pi, 1)$, $(k\pi, -1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hessematrix:

$$(Hf)(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x\,(y^2-1) & 2y\cos x \\ 2y\cos x & 2\sin x \end{pmatrix}.$$

Somit ist für $k \in \mathbb{Z}$:

- $Hf(\pi/2 + k\pi, 0) = \begin{pmatrix} \sin(\pi/2+k\pi) & 0 \\ 0 & 2\sin(\pi/2+k\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2(-1)^k \end{pmatrix}$

also ist $(Hf)(\pi/2 + k\pi, 0)$ ~~ei~~ pos. def., falls k gerade
und neg. def., falls k ungerade ist,

also ~~ist~~ $(\pi/2 + k\pi, 0)$ ein Minimum, falls
k gerade und ein Maximum,
falls k ungerade ist.

- $Hf(k\pi, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2(-1)^k \\ 2(-1)^k & 0 \end{pmatrix}$

  hat die EW $2(-1)^k$ und $-2(-1)^k$, ist also indefinit, somit ist $(k\pi, 1)$ kein Extremum.

- Ganz analog für $Hf(k\pi, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -2(-1)^k \\ -2(-1)^k & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3:

Es ist
$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

$f'(x,y)$ ist also für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ invertierbar. Damit ist f um jeden Punkt (x_0,y_0) lokal invertierbar und es gilt für $(u_0,v_0) = f(x_0,y_0)$:

$$(f^{-1})'(u_0,v_0) = (f'(x_0,y_0))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4:

(a) direkt: $$\int_{C_1} v\, d\vec{s} = \int_0^1 \frac{1}{\cos^2(2\pi t)+\sin^2(2\pi t)} \begin{pmatrix} +\sin(2\pi t) \\ \cos(2\pi t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +2\pi \sin(2\pi t) \\ 2\pi\cos(2\pi t) \end{pmatrix} dt$$

$$\left[c_1'(t) = \begin{pmatrix} +2\pi\sin(2\pi t) \\ 2\pi\cos(2\pi t) \end{pmatrix} \right]$$

$$= \int_0^1 2\pi \sin^2(2\pi t) + 2\pi\cos^2(2\pi t)\, dt = \underline{\underline{2\pi}}.$$

(b) Nicht rechnen. Da z.B. $\cos(2\pi t^5)+3 \geq 2 > 0$ für alle $t \in [0,1]$ ist,
so liegt die Kurve vollständig in z.B. $\mathbb{R}_+ \times (1,\infty)$,
welches den „Ausnahmepunkt" $(0,0)$ nicht enthält,
also insbesondere sternförmig ist.
Da v rotationsfrei ist (nachrechnen!),
hängt das Integral nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.
Es ist AP: $c(0) = (0,4)$,
EP: $c(1) = (0,4)$,
also ist die Kurve sogar geschlossen und
somit $\int_{C_2} v\, d\vec{s} = 0$.

Aufgabe 5:

(a) Wir verwenden Polarkoordinaten:

$$g: [0,4]\times[0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2, \quad g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix},$$

also $|\det g'(r,\varphi)| = r$.

Damit ist

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{r}\cdot r \,d\varphi\, dr = \frac{\pi}{2}\int_0^4 r^{3/2}\,dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{5}\; r^{5/2}\Big|_0^4 = \frac{\pi}{5}\cdot 4^{5/2} = \frac{\pi}{5}\cdot 2^5 = \frac{32\pi}{5}$$

(b) Wir transformieren (Zylinderkoord.)

$$g: \{(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \varphi\in[0,2\pi], z\in[0,1], 0\le r\le z\},$$

$$g(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix},$$

also $|\det g'(r,\varphi,z)| = r$,

$$\int_B f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^z \left(z e^{r^2} + z^2\right) r \,dr\,d\varphi\,dz$$

$$= 2\pi \int_0^1\int_0^z z r e^{r^2} + z^2 r \,dr\,dz = 2\pi\int_0^1 \frac{z}{2}e^s\Big|_0^{z^2} + \frac{z^2}{2}r^2\Big|_0^z \,dz$$

$s = r^2$

$$= 2\pi\int_0^1 \frac{z}{2}e^{z^2} - \frac{z}{2} + \frac{z^4}{2}\,dz = \pi\left(\frac{1}{2}e^y\Big|_0^1 - \frac{z^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{z^5}{5}\Big|_0^1\right)$$

$y = z^2$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{2}e - \frac{4}{5}\pi.$$

(c) Zylinderkoordinaten:

$$g : [1,2] \times [0, 2\pi] \times [6,8] \to \mathbb{R}^3,$$

$$g(r, \varphi, y) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ y \\ r\sin\varphi \end{pmatrix},$$

also wieder $|\det g'(r,\varphi,y)| = r$.

Damit

$$\int_B f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_6^8 \sin(r^2) \cdot r \, dy\, d\varphi\, dr$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_1^2 r \sin(r^2)\, dr \underset{s=r^2}{=} -2\pi \cos(s)\Big|_1^4$$

$$= 2\pi\,(\cos(1) - \cos(4)).$$

Aufgabe 6: Wir berechnen die Schnittlinien der Ränder, also

$$\frac{1}{2} = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 - z^2, \quad \text{also} \quad \frac{1}{2} = 1 - z^2 \text{ oder}$$

$$z^2 = \frac{1}{2}, \text{ also } z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Der Schnittkörper teilt sich also auf in den mittleren Teil

$$M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -\frac{1}{\sqrt{2}} \le z \le \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1/2 \right\}$$

und die beiden Kappen

$$K_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}} \le z \le 1,\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1 - z^2 \right\},$$

$$K_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -1 \le z \le -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1 - z^2 \right\}.$$

Wir berechnen das Volumen von M mit „elliptischen Zylinderkoordinaten":

$$g : \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \to \mathbb{R}^3,$$

$$g(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} 3r\cos\varphi \\ 2r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{also } |\det g'(r,\varphi,z)| = 3 \cdot 2r = \underline{\underline{6r}}$$

und somit

$$V(M) = \int_M 1 \, d(x,y,z) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 6r \, dz \, d\varphi \, dr =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 2\pi \cdot 3 r^2 \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{6\pi}{\sqrt{2}} = 3\pi\sqrt{2}$$

K_1 parametrisieren wir ebenso mit

$$g : [0,1] \times [0, 2\pi] \times \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] \to \mathbb{R}^3,$$

$$g(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} 3r\sqrt{1-z^2}\cos\varphi \\ 2r\sqrt{1-z^2}\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen dann

$$|\det g'(r,\varphi,z)| = 6r(1-z^2), \text{ also}$$

$$V(K_1) = \int_{K_1} 1 \, d(r,\varphi,z) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{1/\sqrt{2}}^1 6r(1-z^2)\,dz\,d\varphi\,dr$$

$$= 6\pi \int_{1/\sqrt{2}}^1 (1-z^2)\,dz = 6\pi\left[\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{z^3}{3}\Big|_{1/\sqrt{2}}^1\right]$$

$$= 6\pi\left[\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{12}\sqrt{2}\right]$$

$$= 6\pi\left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{12}\sqrt{2}\right)$$

$$= 4\pi - \tfrac{5}{2}\sqrt{2},$$

und wegen Symmetrie ist $V(K_2) = V(K_1)$,

also $$V(Z \cap E) = 3\pi\sqrt{2} + 2\cdot\left(4\pi - \tfrac{5}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$= \boxed{3\pi\sqrt{2} + 8\pi - 5\sqrt{2}}$$

Bem.: Es gibt hier auch deutlich einfachere Wege...

Aufgabe 7: Die Param. ist bereits angegeben.

Es ist $p'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

also $N(p(r,\varphi)) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ r \end{pmatrix}$

also $|N(p(r,\varphi))| = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + r^2} = \sqrt{1+r^2}$.

Damit ist

$$\text{Fläche von } W = \int_W 1 \, d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+r^2} \, d\varphi \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2} \, dr = \pi \left(r\sqrt{1+r^2} + \ln\left(r + \sqrt{1+r^2}\right) \right) \Big|_0^1$$

$$= \pi \left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \right).$$

(Bem.: Das Integral $\int \sqrt{1+r^2} \, dr$ muß man nicht kennen...)

Aufgabe 8:

Es ist $\operatorname{div} v(x,y,z) = 2y - 2y - 1 = -1$,

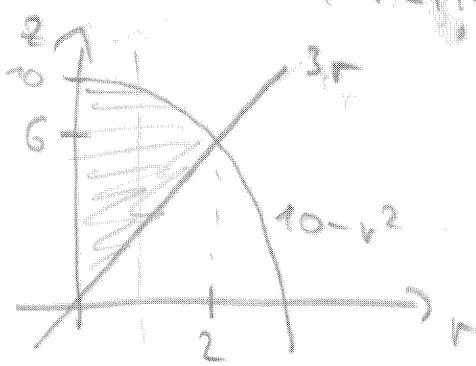
also $\displaystyle\int_{\partial P} v \cdot n \, dO = \int_G \operatorname{div} v(x,y,z) \, d(x,y,z)$

$$= -V(G).$$

Wir bestimmen also das Volumen $V(G)$.

Mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$ schreiben wir $P = \{3r \le z \text{ und } r \le \sqrt{10-z}\}$

Die Kurven schneiden sich an



$3r = 10 - r^2$,

also $r^2 + 3r - 10 = 0$, also

$r = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$,

also (wegen $r \ge 0$) bei $\boxed{r = 2}$ und damit bei $\boxed{z = 6}$

Der Körper zerfällt also in die beiden Teile

$P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 6 \le z \le 10, \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{10-z}\}$

und $P_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 6, \sqrt{x^2+y^2} \le \frac{z}{3}\}$,

Wir parametrisieren P_1 durch

$p_1 : \{(r,\varphi,z) \mid 6 \le z \le 10, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le \sqrt{10-z}\} \to \mathbb{R}^3$,

$p_1(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$, also $|\det p_1'(r,\varphi,z)| = r$ und

$V(P_1) = \displaystyle\int_6^{10} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{10-z}} r \, dr \, d\varphi \, dz = \underline{8\pi}$.

P_2 param. wir durch

$$p_2 : \{(r,\varphi,z) \mid 0 \le z \le 6, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le \tfrac{z}{3}\} \to \mathbb{R}^3,$$

$$p_2(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{also } |\det p_2'(r,\varphi,z)| = r$$

und

$$V(P_2) = \int_0^6 \int_0^{2\pi} \int_0^{z/3} r \, dr \, d\varphi \, dz = \underline{8\pi}.$$

Damit ist $V(P) = 8\pi + 8\pi = 16\pi$

und

$$\int_{\partial P} v \cdot n \, d\sigma = \underline{\underline{-16\pi}}.$$