Lösungsskizzen

Aufgabe 1:

f: Es ist $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Mit z.B. $x_0 = 0$ ist

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x (e^t + e^{-t})\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^x e^t\,dt + \int_0^x e^{-t}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{2} e^t \Big|_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\,dt$$

$$\underset{\substack{s=-t \\ \frac{ds}{dt}=-1 \\ dt=-ds}}{=} \frac{1}{2}(e^x - 1) - \frac{1}{2}\int_0^{-x} e^s\,ds = \frac{1}{2}(e^x-1) - \frac{1}{2} e^s \Big|_0^{-x}$$

$$= \frac{1}{2}(e^x - 1) - \frac{1}{2}(e^{-x} - 1) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x).$$

(Man muß bei $\int e^{-x}$ natürlich nicht unbedingt substituieren)

g: z.B. $x_0 = 0$; (Partielle Int.)

$$G(x) = \int_0^x \underset{g}{t}\, \underset{f'}{\sin(t-4)}\,dt = -t\cos(t-4)\Big|_0^x + \int_0^x \cos(t-4)\,dt$$

[NR: $g'(t) = 1$, Stammfkt. zu $f'(t) = \sin(t-4)$:

$$\int_0^t \sin(s-4)\,ds \underset{\substack{r=s-4 \\ \frac{dr}{ds}=1 \\ dr=ds}}{=} \int_{-4}^{t-4} \sin(r)\,dr = -\cos(t-4) + \text{const.}$$

Also ist $-\cos(t-4)$ eine Stammfkt.]

$$= -x\cos(x-4) + \sin(t-4)\Big|_0^x$$

$$= -x\cos(x-4) + \sin(x-4) \underbrace{-\sin(-4)}_{=\text{const.}}$$

Also ist z.B. $G(x) = \sin(x-4) - x\cos(x-4)$ eine Stammfkt. von g.

h: z.B. $x_0 = 0$:

$$H(x) = \int_0^x \sqrt{2t+3}\,dt = \frac{1}{2}\int_{2\cdot 0+3}^{2\cdot x+3} \sqrt{s}\,ds$$

$s = 2t+3$

$\frac{ds}{dt} = 2$

$dt = \frac{ds}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int_3^{2x+3} s^{1/2}\,ds = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\, s^{3/2}\Big|_3^{2x+3}$$

$$= \frac{1}{3}(2x+3)^{3/2} \underbrace{- \frac{1}{3}\cdot 3^{3/2}}_{=\text{const.}}$$

Also ist z.B.,

$H(x) = \frac{1}{3}(2x+3)^{3/2}$ eine Stammfkt. von h.

Bemerkung: Es ist $\int_a^b \sqrt{x}\,dx = \int_a^b x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_a^b$,

denn die Ableitung von $x \mapsto \frac{2}{3}x^{3/2}$ ist gerade $x \mapsto x^{1/2}$

Aufgabe 2:

(i) Eine Stammfkt. zu $x \mapsto \sin(2x)$ ist $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x)$,

(analog zu $x \mapsto \sin(3x)$.)

Also:

$$\int_0^\pi \underset{f'}{\sin(2x)}\,\underset{g}{\sin(3x)}\,dx = \underbrace{-\frac{1}{2}\cos(2x)\sin(3x)\Big|_0^\pi}_{=0} + \frac{3}{2}\int_0^\pi \underset{f'}{\cos(2x)}\cdot\underset{g}{\cos(3x)}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\left[\underbrace{\frac{1}{2}\sin(2x)\cdot\cos(3x)\Big|_0^\pi}_{=0} + \frac{3}{2}\int_0^\pi \sin(2x)\sin(3x)\,dx\right]$$

$$= \frac{9}{4}\int_0^\pi \sin(2x)\sin(3x)\,dx.$$

Also folgt $\left(1-\frac{9}{4}\right)\int_0^\pi \sin(2x)\sin(3x)\,dx = 0$,

also auch $\int_0^\pi \sin(2x)\sin(3x)\,dx = 0$.

(ii) $$\int_{-1}^0 x^2e^x\,dx = x^2e^x\Big|_{-1}^0 - 2\int_{-1}^0 xe^x\,dx = -1e^{-1} - 2\left[xe^x\Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^x\,dx\right]$$

$$= -e^{-1} - 2\left[-(-1)e^{-1} - e^x\Big|_{-1}^0\right] = -\frac{1}{e} - 2\left[\frac{1}{e} - e^0 + e^{-1}\right]$$

$$= -\frac{1}{e} - \frac{2}{e} + 2 - \frac{2}{e} = 2 - \frac{5}{e}.$$

(iii) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cdot\cos(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\cos(t)}\,dt = \pi/2$$

$x = \sin(t)$

$\frac{dx}{dt} = \cos(t)$

$dx = \cos(t)\,dt$

Grenzen: $0 = \sin(0)$, $1 = \sin(\pi/2)$

Achtung: „andersherum" wie in der Übung

oder so: $$\int_{0=g(0)}^{1=g(1)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cdot\underbrace{\cos(t)}_{g'(t)}\,dt = \ldots = \pi/2.$$

$g: [0,\pi/2] \to [0,1]$

$g(t) = \sin(t)$

Aufgabe 3:

$$\int_a^b f(\lambda t)\,dt = \int_{\lambda a}^{\lambda b} f(s)\,\frac{ds}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(s)\,ds .$$

$$s = \lambda t$$
$$\frac{ds}{dt} = \lambda,$$
$$dt = \frac{1}{\lambda}\,ds$$

oder so: $$\int_a^b f(\lambda t)\,dt = \frac{1}{\lambda}\int_a^b f(\underbrace{\lambda t}_{g(t)})\,\underset{g'(t)}{\lambda}\,dt = \frac{1}{\lambda}\int_{g(a)=\lambda a}^{g(b)=\lambda b} f(x)\,dx .$$

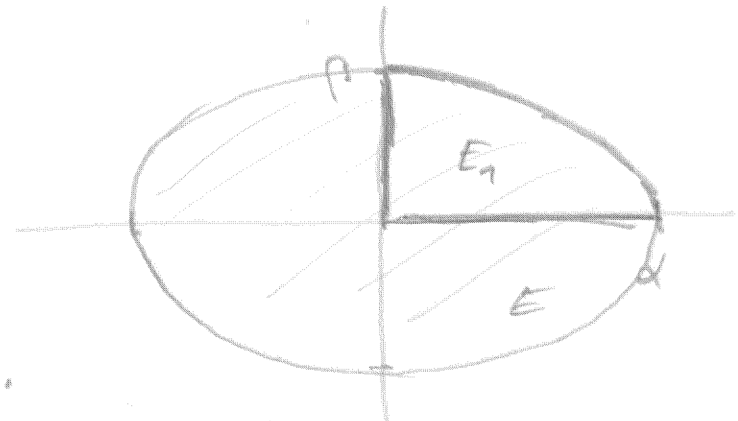
Für $\lambda < 0$ gilt wörtlich der gleiche Beweis.
Ist $\lambda = 0$ so ist natürlich $\frac{1}{\lambda}$ nicht wohldefiniert.
In der Form

$$\lambda \int_a^b f(\lambda t)\,dt = \int_{\lambda a}^{\lambda b} f(s)\,ds$$

gilt dies aber auch für $\lambda = 0$.

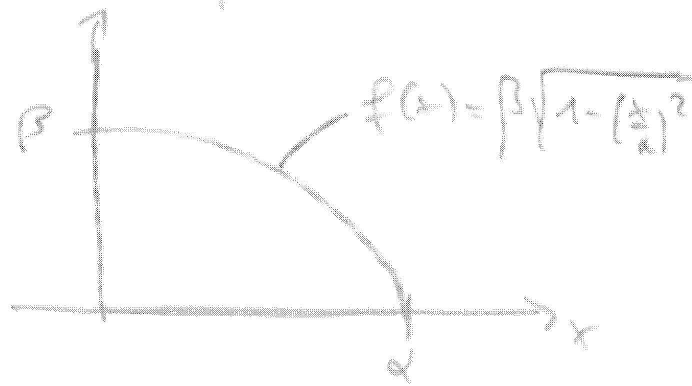
4. Aufgabe

Der Flächeninhalt $A(E)$ ist gleich viermal dem von E_1.



Für $x, y \geq 0$ können wir

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$



nach y auflösen:

$$y^2 = \beta^2\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right), \quad \text{also} \quad \cancel{f}\, f(x) := y = \beta\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}.$$

Wir erhalten:

$$A(E_1) = \int_0^\alpha \beta\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}\, dx = \beta \int_0^\alpha \sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}\, dx$$

$$= \beta\alpha \int_{t=0}^{t=1} \sqrt{1-t^2}\, dt = \beta\alpha \int_{s=0}^{s=\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(s)} \cdot \cos(s)\, ds$$

$t = \frac{x}{\alpha}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\alpha}$, $\alpha\, dt = dx$

$\left.\begin{array}{l} t = \sin(s) \\ \frac{dt}{ds} = \cos(s) \\ dt = \cos(s)\, ds \end{array}\right\}$ ähnlich wie in der Übung

$$= \beta\alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2(s) = \beta\alpha \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2s)\right) ds =$$

$$= \beta\alpha\left[\pi/4 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(2s)\, ds\right] = \beta\alpha\left[\pi/4 + \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^{\pi} \cos(s)\, ds}_{=0}\right]$$

$= \frac{\beta\alpha \cdot \pi}{4}$. Also ist die Fläche: $A(E) = 4 \cdot \frac{\beta\alpha\pi}{4} = \beta\alpha \cdot \pi$