Lösungsskizzen

Aufgabe 1:

Topologie: $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$ per Def.

Es bleibt zu zeigen, daß alle endlichen Schnitte und bel. Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{O}$ wieder zu einer Menge aus $\mathcal{O}$ führt. Hierbei ist also eine Vielzahl von möglichen Kombinationen zu betrachten. Man erledige das durch scharfes Hinsehen...

Abgeschlossene Mengen: Eine Menge $A \subset X$ ist abgeschlossen, falls $X \setminus A \in \mathcal{O}$ ist.

Dies ist der Fall für: $\{b\}, \{b,d\}, \{b,c\}, \{b,c,d\}$.

Der Raum ist kein Hausdorffraum, denn der Punkt b kann von z.B. a nicht durch offene Mengen getrennt werden: Die einzige offene Menge, die b enthält ist $X = \{a,b,c,d\}$, die auch a enthält. Somit kann es keine Mengen $U_a, U_b \in \mathcal{O}$ geben mit $a \in U_a$, $b \in U_b$ und $U_a \cap U_b = \emptyset$.

Aufgabe 2:

(i) Wir haben bereits in Analysis I nachgewiesen, daß die offenen Mengen in metrischen Räumen alle für eine Topologie geforderten Eigenschaften erfüllen.

(ii) $\Leftarrow$: Sei f konstant, d.h. $\exists y_0 \in Y$ mit $f(x) = y_0 \quad \forall x \in X$.

Sei $U_Y \in \mathcal{O}_Y$ bel. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

1) $y_0 \in U_Y$: Dann ist $f^{-1}(U_Y) = X \in \mathcal{O}_X$

2) $y_0 \notin U_Y$: Dann ist $f^{-1}(U_X) = \emptyset \in \mathcal{O}_X$.

Somit ist f stetig.

$\Rightarrow$: Sei f stetig. Angenommen, f wäre nicht konstant. Dann gibt es $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Da $\{f(x_1)\} \in \mathcal{O}_Y$ ist, und da f stetig ist, muß $f^{-1}(\{f(x_1)\}) \in \mathcal{O}_X = \{\emptyset, X\}$ sein, also $f^{-1}(\{f(x_1)\}) = X$. Das heißt aber insbesondere $x_2 \in f^{-1}(\{f(x_1)\})$, also $f(x_2) = f(x_1)$ $\lightning$.

Aufgabe (5)

(i)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2\sqrt{3}\,x - 4\sin(4x-2y)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2\sin(4x-2y)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 3\cos(3x+5y)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 2\sqrt{3}\,y + 5\cos(3x+5y)$$

Alle partiellen Abl. sind stetig auf $\mathbb{R}^2$, also ist f stetig part. diffbar und damit diffbar. Die Ableitung schreiben wir als

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\,x - 4\sin(4x-2y) & 2\sin(4x-2y) \\ 3\cos(3x+5y) & 2\sqrt{3}\,y + 5\cos(3x+5y) \end{pmatrix}$$

(ii) Es ist

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y)+1 & \cos(x+y) - \sin(y) \end{pmatrix},$$

also

$$g'(\pi/2, 0) = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2)+1 & \cos(\pi/2) - \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit mit $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$:

$$\frac{\partial g}{\partial v}(\pi/2, 0) = g'(\pi/2,0)\cdot v = g'(\pi/2,0)\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(ii) Es ist

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(0+t,0)-g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\cdot 0}{|t|} - 0}{t} = 0$$

und ganz analog $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$.

Es ist aber g in 0 nicht diffbar, denn dann wäre

$$g'(0,0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\right) = (0 \quad 0),$$

und es würde $r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig geben mit $r(0,0)=0$

und

$$g(x,y) = g(0,0) + (0 \quad 0)\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} + r(x,y)\left\|\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}\right\|$$

$$= r(x,y)\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|,$$

also $r(x,y) = \dfrac{g(x,y)}{\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$

Dann gilt aber nicht $r(x,y) \xrightarrow[x,y\to 0]{} 0$:

Mit $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$ ist

$$r(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{2\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \not\to 0.$$

Wegen $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ für $a,b \geq 0$ gilt:

$$|g(x,y) - g(0,0)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0,$$

also ist f in $(0,0)$ stetig.

Aufgabe 4.

(i) Mit $(x_0, y_0) = (0,0)$ gilt für bel. $(h_x, h_y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x_0, y_0) = f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}\right) = f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) = f(h_x, h_y) = \begin{pmatrix} h_x + h_x^2 h_y \\ 1 + h_y \end{pmatrix}$$

Wir suchen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit r stetig, $r(0,0) = (0,0)$ und

$$f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) = f(x_0, y_0) + A \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} + r(h_x, h_y) \left\| \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \right\|,$$

also

$$\begin{pmatrix} h_x + h_x^2 h_y \\ h_y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} + r(h_x, h_y) \left\| \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \right\|.$$

Achtung: $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist eine konstante Matrix, darf also nicht von h_x, h_y abhängen!

Wir probieren $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also $A \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$ und setzen also $r(h_x, h_y) = \begin{pmatrix} h_x^2 h_y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \right\|}$.

Es bleibt zu zeigen: $r(h_x, h_y) \longrightarrow (0,0)$ für $(h_x, h_y) \to (0,0)$:

Die zweite Komponente ist konstant 0, also ist nur die erste zu untersuchen.

$$\left| \frac{h_x^2 h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \right| \underset{ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)}{\le} \frac{h_x}{2} \frac{h_x^2 + h_y^2}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = \frac{h_x}{2} \sqrt{h_x^2 + h_y^2} \xrightarrow[h_x, h_y \to 0]{} 0.$$

Also ist f in $(0,0)$ total diffbar.
In der Tat ist

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 1+2xy\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 0\,, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 1\,.$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig, also ist f sogar überall diffbar und

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1+2xy & x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Bem.</u> und natürlich ist $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, aber das wussten wir ja bereits.