Lösungsskizzen:

Aufgabe 1: Es ist $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} & 1 \\ -y\sin(xy) & -x\sin(xy) \end{pmatrix}$

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -2t \end{pmatrix},$$

also nach der Kettenregel:

$$(f\circ g)'(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2\ln t} & 1 \\ -t^2\sin(-t^2\ln t) & -\ln t\,\sin(-t^2\ln t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -2t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2t - 2t \\ t\sin(-t^2\ln t) + 2t\ln t\,\sin(-t^2\ln t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (2\ln t + 1)\cdot t\sin(-t^2\ln t) \end{pmatrix}$$

direkt: $(f\circ g)(t) = \begin{pmatrix} e^{2\ln t} - t^2 \\ \cos(-t^2\ln t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(-t^2\ln t) \end{pmatrix},$

also $(f\circ g)'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(-t^2\ln t)\cdot(-2t\ln t - t) \end{pmatrix}$ ✓

Aufgabe 2:

Wir setzen $g: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

Dann ist $\frac{1}{f} = g \circ f$ und

da g diffbar ist mit $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, so folgt nach der Kettenregel:

$$D\left(\frac{1}{f}\right)(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$= -\frac{1}{f(x_0)^2} \cdot f'(x_0) \qquad \square$$

<u>Aufgabe 3</u>: Wir setzen

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) := xy \, .$$

Dann ist h diffbar und

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} .$$

Weiter sei $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $k(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$.

Dann ist k diffbar und $k'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$.

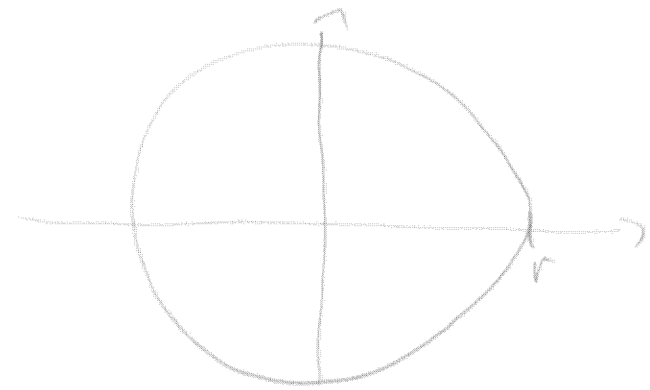
Nach der Kettenregel ist also

$$\begin{aligned}(fg)'(t) &= (h \circ k)'(t) = h'(k(t)) \cdot k'(t) \\ &= \begin{pmatrix} g(t) & f(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} \\ &= g(t) f'(t) + f(t) g'(t) \, .\end{aligned}$$

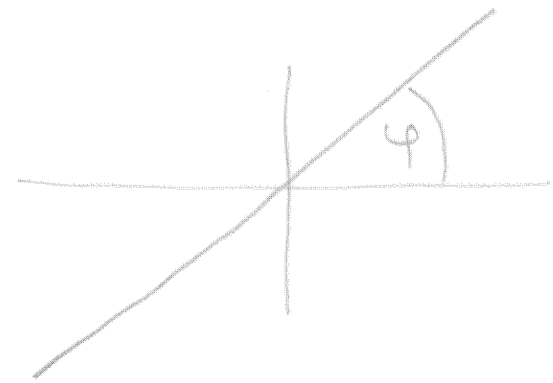
Aufgabe 4:

(i)

$r = \text{const.}$:



$\varphi = \text{const.}$:



(ii) $g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$, $\det(g'(r,\varphi)) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi$
$= \underline{\underline{r}}$

Also ist g stetig partiell diffbar und somit auch differenzierbar.

(iii) Es ist $f'(x,y) = (2x \quad 2y)$, also

$$(f\circ g)'(r,\varphi) = f'(g(r,\varphi))\cdot g'(r,\varphi)$$
$$= (2r\cos\varphi \quad 2r\sin\varphi)\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$= (2r\cos^2\varphi + 2r\sin^2\varphi \quad -2r^2\cos\varphi\sin\varphi + 2r^2\cos\varphi\sin\varphi)$$
$$= (2r \quad 0).$$

$f(x,y) = \left\|\binom{x}{y}\right\|^2$ ist eine rotationssymmetrische Funktion, die deshalb nur vom Betrag des Punktes $\binom{x}{y}$, in Polarkoordinaten also nur von r abhängt.

(iv) $\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x(x^2+y^2)^{-1/2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$$= \frac{y^2}{\left\|\binom{x}{y}\right\|^3}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x(x^2+y^2)^{-1/2}\right) = -x \, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{-xy}{\left\|\binom{x}{y}\right\|^3}.$$

Analog: $\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) = \frac{-xy}{\left\|\binom{x}{y}\right\|^3}$, $\frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2}{\left\|\binom{x}{y}\right\|^3}$

Alle part. Abl. sind auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig, also ist h diffbar und $h'(x,y) = \frac{1}{\left\|\binom{x}{y}\right\|^3}\begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$.

Es ist für $r \neq 0$: $h \circ g\big|_{\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r \neq 0\}}(r,\varphi) = (h \circ g)(r,\varphi)$

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}}\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

also $(h \circ g)'\big|_{\{\ldots\}}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

stetig, also $h \circ g\big|_{\{\ldots\}}$ diffbar.

Mit der Kettenregel:

$$(h \circ g)'\big|_{\{\ldots\}}(r,\varphi) = h'\left(g\big|_{\{\ldots\}}(r,\varphi)\right) \cdot g\big|_{\{\ldots\}}'(r,\varphi) =$$

$$= \frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} r^2\sin^2\varphi & -r^2\sin\varphi\cos\varphi \\ -r^2\sin\varphi\cos\varphi & r^2\cos^2\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

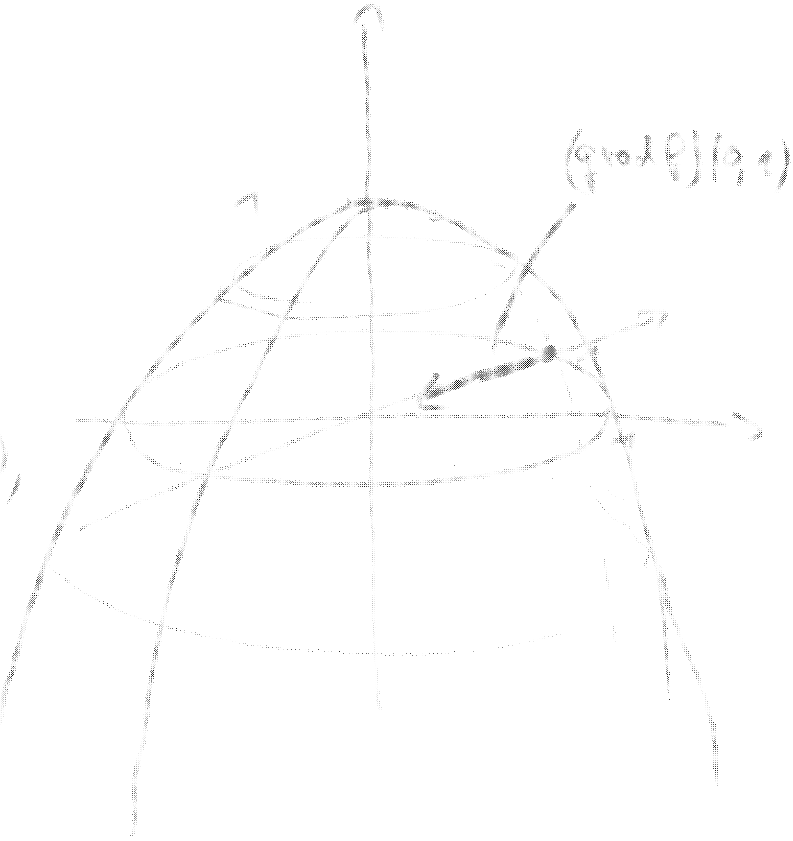
$$= \frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} r^2\sin^2\varphi\cos\varphi - r^2\sin^2\varphi\cos\varphi & -r^3\sin^3\varphi - r^3\sin\varphi\cos^2\varphi \\ -r^2\sin\varphi\cos^2\varphi + r^2\cos^2\varphi\sin\varphi & r^3\sin^2\varphi\cos\varphi + r^3\cos^3\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 = 1 - \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^2$$

(Also ist $f(x,y) = f(\tilde{x},\tilde{y})$, falls $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}\right\|$: rotationssymmetrisch!)



Es ist $(\operatorname{grad} f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

und somit $(\operatorname{grad} f)(0,1) = -2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}}}$ ✓

$$N_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{f(x,y) = 0}_{\Leftrightarrow \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| = 1}\} = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2.$$

$$N_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{f(x,y) = 1}_{\Leftrightarrow \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| = 0}\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$N_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{f(x,y) = -1}_{\Leftrightarrow \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^2 = 2}\} = B(0,\sqrt{2})$$

$$N_{35} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = -34\} = \emptyset.$$

Es ist z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in N_0 = B(0,1)$ und $(\operatorname{grad} f)(1,0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf $B(0,1)$.

Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(1,0,f(1,0)) = (1,0,0)$:

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = \underbrace{f(1,0) + f'(1,0) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$= 0 + \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

$$= 2 - 2x$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 2 - 2x \right\}$$

im Punkt $(0,0,f(0,0)) = (0,0,1)$:

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = \underbrace{f(0,0) + f'(0,0) \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$= 1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 1 \right\}$$

An der Skizze veranschaulichen!