Aufgabe 1:

- $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $(Hf)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

also

$$(T_2 f)(x,y) = f(1,1) + \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= a + b + a(x-1) + b(y-1)$$
$$= ax + by \; (= f(x,y))$$

- $(\nabla g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2x \end{pmatrix}$, $(Hf)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

also $(\nabla g)(1,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(Hf)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,

also

$$(T_2 f)(x,y) = g(1,1) + \left\langle (\nabla g)(1,1), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle (Hf)(1,1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$= 3 + \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$= 3 + 4(x-1) + 2(y-1) + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 2(x-1) + 2(y-1) \\ 2(x-1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$= 4x + 2y - 3 + (x-1)^2 + (y-1)(x-1) + (x-1)(y-1)$$
$$= 4x + 2y - 3 + x^2 - 2x + 1 + 2xy - 2x - 2y + 2$$
$$= x^2 + 2xy \; (= g(x,y))$$

Bemerkung:
Da f, g Polynome 1. bzw. 2. Grades sind, ist natürlich das entspr. Taylorpolynom gleich der Funktion selbst.

$\cdot\ (D h_1)(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$, $(H h_1)(x,y) = \begin{pmatrix} 2\frac{y}{x^3} & -\frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{x^2} & 0 \end{pmatrix}$,

also $(D h_1)(1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(H h_1)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$h_1(1,1) = 1$.

Also $(T h_1)(x,y) = 1 + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x- \\ y- \end{pmatrix}\right.$

$= 1 + (y-1) - (x-1) + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 2(x-1) - (y-1) \\ -(x-1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$= y - x + 1 + (x-1)^2 - (x-1)(y-1)$

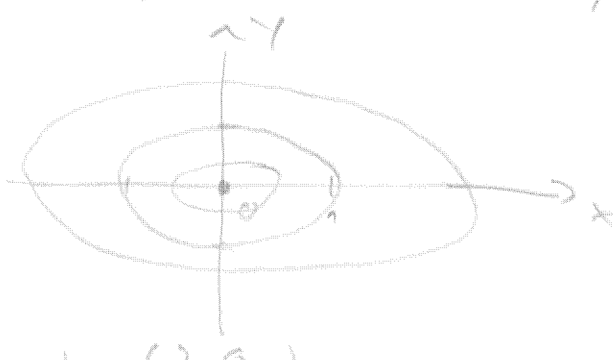
$= y - x + 1 + x^2 - 2x + 1 - xy + x + y - 1$

$= \underline{\underline{x^2 - xy - 2x + 2y + 1}}$.

Aufgabe 2:

- $(\nabla f_1)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}$, $Hf_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

  Also einziger krit. Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Minimum, da $(Hf)(0,0)$ die EW $2, 4 > 0$ hat.



- $(\nabla f_2)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -4y \end{pmatrix}$, $(Hf_2)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

  Der einzige krit. Punkt $(0,0)$ ist kein Extremum, da $(Hf)(0,0)$ die EW $2 > 0$ und $-4 < 0$ hat, also indefinit ist.

- $(\nabla f_3)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$, $(Hf_3)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

  der einzige krit. Punkt ist $(x,y) = (0,0)$, die EW von $(Hf_3)(0,0)$ sind 2 und 0, also kann erstmal keine Aussage getroffen werden. Es ist aber $f_3(0,0) = 0 \leq x^2 = f(x,y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, also ist $(0,0)$ ein Minimum.

- $(\nabla f_4)(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -4y \end{pmatrix}$, $(Hf_4)(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$,

  also ist der einzige krit. Punkt $(0,0)$ ein Maximum.

- $(\nabla f_5)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ \pm 4y^3 \end{pmatrix}$, $(Hf_5)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \pm 4y^2 \end{pmatrix}$.

Der einzige krit. Punkt ist $(0,0)$ und

$(Hf_\pm)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in beiden Fällen kann also vorerst keine Aussage getroffen werden.

Bei „+" ist aber wieder $f(0,0) = 0 \leq x^2 + y^4 = f(x,y)$, also $f(0,0)$ ein Minimum

Bei „–" gilt: $f(t,0) = t^2 > 0 = f(0,0) > -t^4 = f(0,t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, also ist $(0,0)$ <u>kein</u> Extremum.

Aufgabe 3: • Für $(x,y) \in (-1,1)^2$ ist

$(Df)(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ und $(Hf)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

einziger krit. Punkt ist $(0,0)$, aber $(Hf)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat die EW -1 und 1 ist also indefinit. Somit hat f keine lokalen Extrema.

Es ist für $(x,y) \in [-1,1]^2$:

$$-1 \leq f(x,y) = xy \leq 1,$$

und für $xy = 1$ gdw. $x = y = 1$ oder $x = y = -1$,

$xy = -1$ gdw. $x = 1, y = -1$ oder $x = -1, y = 1$.

Somit sind $(1,1)$ und $(-1,-1)$ globale Maxima, $(-1,1)$ und $(1,-1)$ globale Minima.

• $(Dg)(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}$, $(Hg)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$.

kritische Punkte: $\begin{Bmatrix} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = x^2 \\ x = y^2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = x^2 \\ x = x^4 \end{Bmatrix}$,

also $x = y = 0$ oder $x = y = 1$.

$(Hg)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit (wie oben), also $(0,0)$ kein lokales Extremum.

$(Hg)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ hat die EW 3 und 9, also ist $(1,1)$ ein lokales Minimum.

g hat keine globalen Extrema, denn z.B.

$g(x,0) = x^3 \longrightarrow +\infty$ für $x \to \infty$ und

$\longrightarrow -\infty$ für $x \to -\infty$.

Aufgabe 4:

Für jedes $n>0$ ist $\overline{B}(0,n) \cap \overline{D}$ kompakt, also nimmt f auf $\overline{B}(0,n) \cap \overline{D}$ ihr Minimum in $x_n \in \overline{B}(0,n) \cap \overline{D}$ an.

Angenommen, f ~~würde~~ hätte kein Minimum in $\overline{D}$, d.h. für jedes $x \in \overline{D}$ gibt es ein $\hat{x} \in \overline{D}$ mit $f(\hat{x}) < f(x)$. $(*)$

Wir definieren nun rekursiv die Folge $(\hat{x}_n)$:
$\hat{x}_1 = x_1$,

Für $n>1$ sei $\hat{n} = \min \underbrace{\{k>n \mid f(x_k) < f(x_n)\}}_{\neq \emptyset \text{ wegen } (*)}$,
also $\hat{n} > n$ und wir setzen
$\hat{x}_{n+1} = x_{\hat{n}}$.

Somit ist $(f(x_n))$ eine streng monoton fallende Folge, insb. beschränkt.

Es muß $\|x_n\| \to \infty$ gelten, denn sonst gäbe es $N>0$: $(x_n) \subset \overline{B}(0,N)$, also
$x_n = x_N \quad \forall n \in \mathbb{N}$ nach Def. der x_n,
also würde f in x_N ein Minimum haben ↯.

Da $\|x_n\| \to \infty$, ~~folgt~~ folgt $f(x_n) \to \infty$ ↯.