Aufgabe 1:

f: $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & -\sin(y) \end{pmatrix}$ ist invertierbar,

falls $x \neq 0$ und $\sin(y) \neq 0$, also falls $y \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Um diese ~~Punkte~~ Punkte $a = (x_0, y_0) \in M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \wedge y \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ist f also lokal invertierbar und mit $b = f(a)$ ist

$$(f^{-1})'(b) = (f'(a))^{-1} = \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ 0 & -\sin(x_0) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2x_0} & \frac{y_0}{x_0 \sin(x_0)} \\ 0 & -\frac{1}{\sin(x_0)} \end{pmatrix}.$$

Auch auf M ist f nicht global invertierbar, denn es sind z.B. die Punkte $(1,1)$ ~~und~~, $(-1,1) \in M$, aber $f(1,1) = (2, \cos(1)) = f(-1,1)$.

g: $g'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 3y^2 \\ e^x & 0 \end{pmatrix}$ ist invertierbar, falls

$\det g'(x,y) = -3e^x y^2 \neq 0$, also falls $y \neq 0$.

Also ist g um jeden Punkt $a \in M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ lokal invertierbar und mit $b = f(a)$ ist

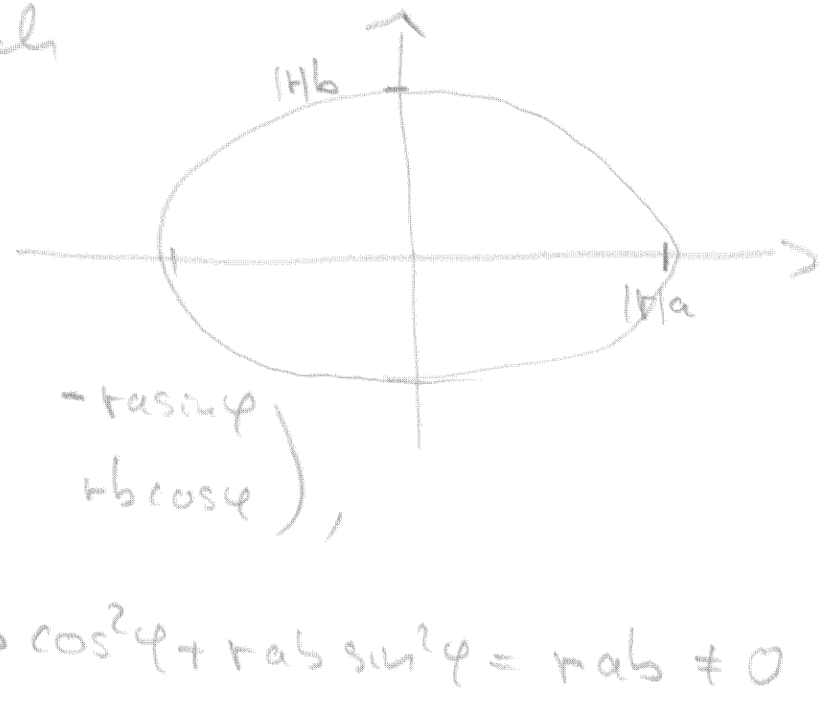
$$(f^{-1})'(b) = (f'(a))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3y_0^2 \\ e^{x_0} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{e^{x_0}} \\ \frac{1}{3y_0^2} & -\frac{1}{3e^{x_0} y_0^2} \end{pmatrix}.$$

Auf M ist g hier sogar (global) injektiv, Denn aus $g(x,y) = g(\tilde{x}, \tilde{y})$ folgt zuerst $e^{\tilde{x}} = e^x$, also $x = \tilde{x}$ und damit aus $x + y^3 = \tilde{x} + \tilde{y}^3$, also $y^3 = \tilde{y}^3$, also $y = \tilde{y}$.

Damit ist $g: M \to g(M)$ bijektiv.

Aufgabe 2:

Für festes r ist das Bild von $\varphi \mapsto F(r,\varphi)$ gegeben durch



$$F'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -ra\sin\varphi \\ b\sin\varphi & rb\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\det F'(r,\varphi) = rab\cos^2\varphi + rab\sin^2\varphi = rab \neq 0 \quad \forall (r,\varphi) \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}.$$

Somit ist F überall lokal invertierbar.
F ist nicht global invertierbar, da z.B.

$F(1,0) = F(1,2\pi)$ oder auch $F(1,0) = F(-1,\pi)$.

Betrachten nur
$F: (0,\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, so ist f bijektiv.

<u>Aufgabe 3</u>: Wir setzen in der Sprache der VL: $x=(u,v)\in\mathbb{R}^2$ und $y=w$,

$f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und

$$(D_y f)(x,y)=\frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)=\cos(w)\neq 0 \text{ für z.B. } |w|<\frac{\pi}{2}.$$

Es ist mit $a=(0,0)$, $b=0$: $f(a,b)=f(0,0,0)=0$, und insbesondere $(D_y f)(a,b)=\cos(0)=1\neq 0$, also invertierbar.

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt nun, daß es Umgebungen $U_a\subset\mathbb{R}^2$ von $a=(0,0)$ und $U_b\subset\mathbb{R}$ von $b=0$ gibt und eine stetig differenzierbare Funktion $g:U_a\to U_b$ mit

$f(x,y)=0$, $x\in U_a$, $y\in U_b$ $\Leftrightarrow$ $y=g(x)$ ist,

oder äquivalent: [illegible]

$f(u,v,w)=0$, $(u,v)\in U_a$, $w\in U_b$ $\Leftrightarrow$ $w=g(u,v)$.

Es gilt dann für die Lösungsfunktion $w(u,v)=g(u,v)$:

$$w'(0,0)=w'(a)=-\underbrace{\underbrace{\left((D_y f)(a,b)\right)^{-1}}_{\cos(0)=1}}_{=-1}\underbrace{(D_x f)(a,b)}_{=(2\ \ 0)}=(-2\ \ 0),$$

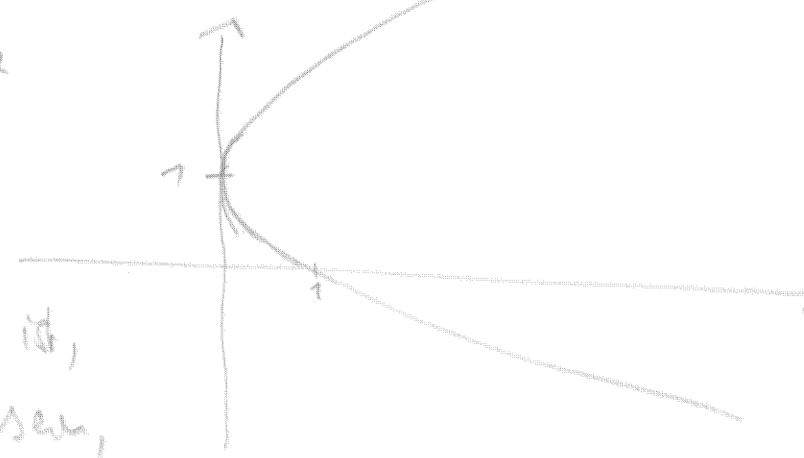
denn $(D_x f)(x,y)=(D_x f)(u,v,w)=\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)\ \ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)\right)$

$=\left(4u^3+2\cos(v)\ \ \ -2u\sin(v)\right)$, also

$(D_x f)(a,b)=(D_x f)(0,0,0)=(2\ \ 0)$

Aufgabe 4:

$$f(x,y)=0 \Leftrightarrow x=(y-1)^2$$



Der einzige Punkt, an dem der Satz nicht anwendbar ist, sollte der Punkt $(0,1)$ sein, da dort „die Menge senkrecht zur x-Achse" ist.

Wir müssen also

$$(D_y f)(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2(y-1)\overset{!}{\neq}0$$ fordern,

also $y\neq 1$.

An allen Punkten (a,b) mit $b\neq 1$ und $f(a,b)=0$ (also $a=(b-1)^2$), können wir den Satz anwenden.

Aus $b=1$ und $f(a,b)=0$ folgt $a=0$, also kann der Satz tatsächlich nicht am Punkt $(0,1)$ angewandt werden.

Da hier $n=m$ ist können wir die Rollen von x und y vertauschen.

In diesem Fall wollen wir also $f(x,y)=0$ <u>nicht</u> nach y (in Abhängigkeit von x), <u>sondern</u> nach x (in Abhängigkeit von y) auflösen und müssen also $(D_x f)(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\neq 0$ fordern, also $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-1\neq 0$. In diesem Fall kann der Satz also auf alle Punkte (a,b) mit $f(a,b)=0$ angewandt werden.

Aufgabe 5:

$$(\nabla f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix},$$

mit $H(x,y) = y + 1 - x^2$ ist

$$(\nabla H)(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix},$$

Es ist das GS $(\nabla f)(x,y) = \lambda (\nabla H)(x,y)$, $H(x,y)=0$ zu lösen, also

$$\begin{cases} 2x = -2\lambda x \\ 4y = \lambda \\ y + 1 = x^2 \end{cases}.$$

Aus der ersten Gl. erhalten wir $x = 0$ oder $\lambda = -1$.

Für $x = 0$ folgt dann $y = -1$ (und $\lambda = -4$)

für $\lambda = -1$ folgt $y = -\frac{1}{4}$ und $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Es gibt also 3 kritische Punkte:

$P_1 = (0, -1)$

$P_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$P_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Es ist $f(P_1) = 2$, $f(P_2) = f(P_3) = \frac{7}{8}$

In der Tat kann man sich überlegen, daß P_1 kein Maximum von f unter der Nebenbedingung ist, P_2 und P_3 aber Minima.