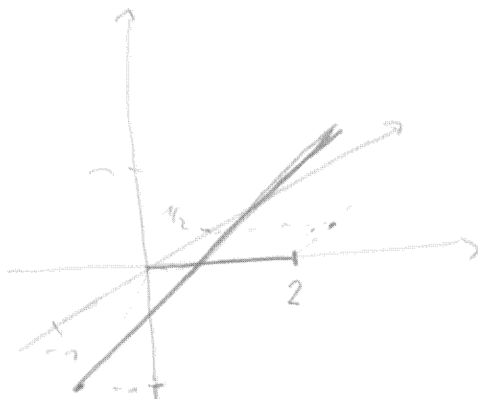
Aufgabe 1:

(i) $\alpha_1 : [0,2] \to \mathbb{R}^3$,

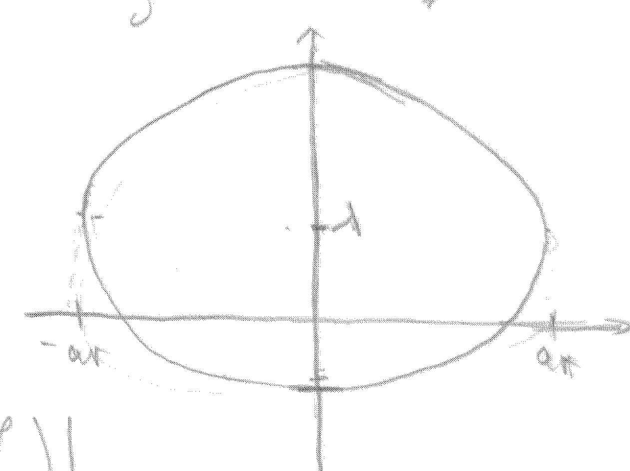
$\alpha_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}(t-1) \\ t-1 \end{pmatrix}$



$$L(C_1) = \int_{C_1} 1\, ds = \int_0^2 |\alpha_1'(t)|\, dt = \int_0^2 \frac{3}{2}\, dt = 3$$

(ii) $\alpha_2 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$\alpha_2(\varphi) = r\begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



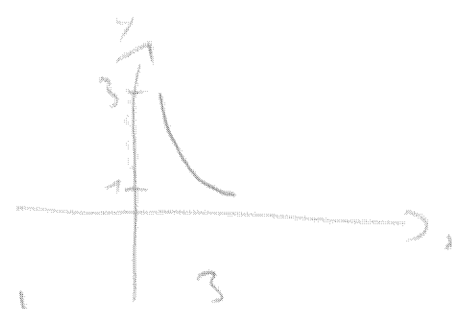
$$L(C_2) = \int_{C_2} 1\, ds = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -ra\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2a^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi} = r\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi$$

Das auftretende Integral ist nicht elementar lösbar.

(iii) Der Fall $\lambda = 0$ führt auf ein Geradenstück.
Sei also oBdA $\lambda > 0$, also $x = \frac{\lambda}{y}$.
Wir parametrisieren einfach durch

$\alpha_3 : [1,3] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ t \end{pmatrix}$.



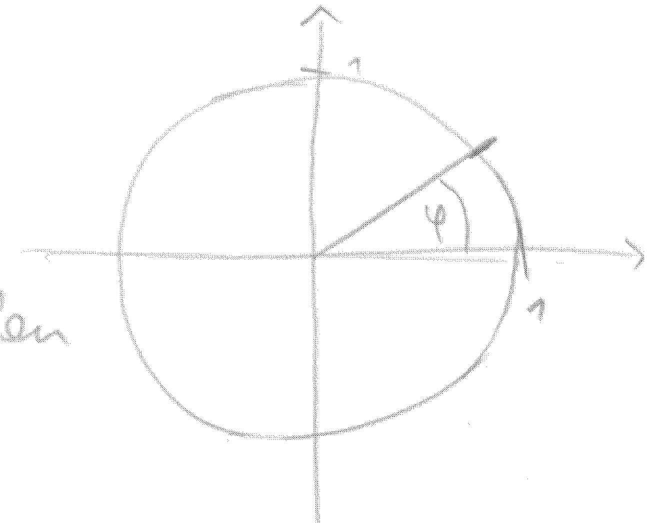
Dann ist $L(C_3) = \int_1^3 |\alpha_3'(t)|\, dt = \int_1^3 \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{t^4}^2}\, dt$

$= \int_1^3 \sqrt{}$

Aufgabe 2:

a) Sei $\varphi_0 > 0$.

Wir parametrisieren den Kreisbogen C_{φ_0} durch

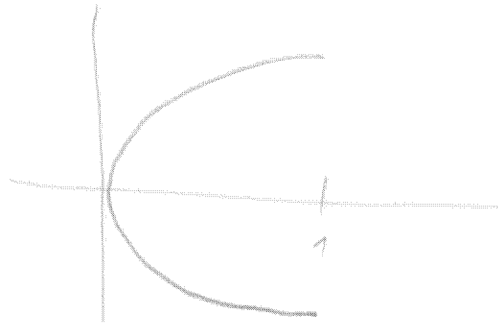


$\alpha : [0, \varphi_0] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$.

Dann ist $L(C_{\varphi_0}) = \int_0^{\varphi_0} |\alpha'(\varphi)| \, d\varphi = \int_0^{\varphi_0} 1 \, d\varphi = \underline{\underline{\varphi_0}}$

Aufgabe 3:

(i) Wir parametrisieren C durch



$\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}.$

Dann ist $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$, also

$$\int_C v\, dx = \int_{-1}^{1} v(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ \sin(\pi t/2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{-1}^{1} 2t e^{t^2} + \sin(\pi t/2)\, dt = 0$$

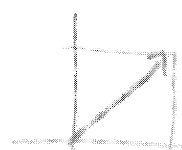
(ii) Parametrisierung: $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} t^a \\ t \end{pmatrix}.$

$$\int_C v\, dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^3 \\ t^{3a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a t^{a-1} \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 a t^{a+2} + t^{3a}\, dt$$

$$= \frac{a}{a+3} t^{a+3} \Big|_0^1 + \frac{1}{3a+1} t^{3a+1} \Big|_0^1 = \underline{\frac{a}{a+3} + \frac{1}{3a+1}}.$$

(iii) (1.) $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$

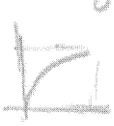
$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also



$$\int_C v\, dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t \\ t+t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 3t + t^2\, dt = \frac{3}{2} t^2 + \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{11}{6}}}$$

(2.) $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix},$



$$\int_{\tilde{C}} v\, dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2+t \\ 2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 2t^3 + 4t^2\, dt = \frac{1}{2} t^4 + \frac{4}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{11}{6}}}$$

Aufgabe 4:

Reflexivität: $\varphi = id : [a,b] \to [a,b]$,
$\varphi(t) = t$
erfüllt alle Eigenschaften.

Symmetrie: Sei $\alpha \sim \beta$, d.h. $\exists\, \varphi : [a,b] \to [c,d]$ stetig, surj., streng monoton wachsend mit $\alpha = \beta \circ \varphi$.
Da φ bij. ist, so ist auch $\varphi^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ stetig, streng monoton wachsend und surj.,
und es gilt: $\beta = \alpha \circ \varphi^{-1}$, also $\beta \sim \alpha$.

Transitivität: Sei $\alpha \sim \beta \sim \gamma$, $\varphi : [a,b] \to [c,d]$
mit $\alpha = \beta \circ \varphi$ und $\psi : [c,d] \to [e,f]$
$\beta = \gamma \circ \psi$, φ, ψ stetig, streng mon. steigend & surj.
mit
Dann ist $\psi \circ \varphi : [a,b] \to [e,f]$ stetig, streng mon. steigend und surjektiv
und $\alpha = \beta \circ \varphi = (\gamma \circ \psi) \circ \varphi = \gamma \circ (\psi \circ \varphi)$.

Aufgabe 5:

Sei $\alpha = \beta \circ \varphi$, φ orientierungserhaltend

Dann ist $\alpha'(t) = \beta'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, da φ orient. erh. ist, so ist $\varphi'(t) > 0 \quad \forall t \in [a,b]$.

Somit ist $\dfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \dfrac{\beta'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)}{|\beta'(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)|} = \dfrac{\beta'(\varphi(t))}{|\beta'(\varphi(t))|}$.

Ist φ orient. umkehrend, so ist $|\varphi'(t)| = -\varphi'(t)$,

also $\dfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = -\dfrac{\beta'(\varphi(t))}{|\beta'(\varphi(t))|}$ und der Tangenteneinheitsvektor zeigt in die umgekehrte Richtung.

$$L(C) = \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt = \int_a^b |\beta'(\varphi(t))|\,|\varphi'(t)|\,dt =$$

$$= -\int_a^b |\beta'(\varphi(t))|\,\varphi'(t)\,dt = -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} |\beta'(s)|\,ds$$

Wir betrachten nur den Fall: $\varphi'(t) < 0 \quad \forall t \in [a,b]$, also φ orient. umkehrend. Der andere Fall ist leichter

Da φ streng monoton fällt, ist $\varphi(a) = d$ und $\varphi(b) = c$,

also in der Tat

$$-\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} |\beta'(s)|\,ds = -\int_d^c |\beta'(s)|\,ds = \int_c^d |\beta'(s)|\,ds.$$