Aufgabe 1:

(i) Konservative VF sind Potentialfelder, sei also f ein Potential von v, also $\nabla f = v$.
Nun gilt $\operatorname{rot} v = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$;
denn es ist nach dem Satz von Schwarz:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial v_k}{\partial x_i}.$$

(ii)

$$\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z} = 0$$

(iii) $v(x,y,z) = (xy, xyz, \cancel{z}ze^z)$.

$\operatorname{div} v(x,y,z) = y + xz + xe^z + xze^z$.

$$\operatorname{rot} v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 - xy \\ 0 - ze^z \\ yz - x \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} -xy \\ -ze^z \\ yz - x \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Es ist offenbar $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$ ein Potential von v.

Also ist mit $c(0) = (1, 0, 1)$, $c(2\pi) = (1, 0, -1)$

$$\int_c v \, dx = f(1,0,-1) - f(1,0,1) = 1 - 1 = 0$$

Aufgabe 3:

(i) $\frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y) = -1$, $\frac{\partial v_2}{\partial x}(x,y) = 1$, also ist

v nicht rotationsfrei, kann also kein Potential haben.

$\frac{\partial w_1}{\partial y}(x,y) = -6xy$, $\frac{\partial w_2}{\partial x}(x,y) = -6xy$.

Also ist w rotationsfrei und da w auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert ist (sternförmiges Gebiet) hat w ein Potential.

(ii) Für w: Da $\gamma_1(0) = (0,1)$ und $\gamma_1(1) = (1,2)$ ist, so müssen beide Kurvenintegrale übereinstimmen, da w als konservatives Vektorfeld wegunabhängige Integrale besitzt.

Wir können leicht ein Potential von w erraten (oder berechnen):

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{3}{2}x^2y^2.$$

Also ist $\int_{\gamma_1} v\,dx = f(1,2) - f(0,1) =$

$$= \frac{1}{4} + 4 - 6 - \frac{1}{4} = \underline{\underline{-2}}$$

Für v: Wir müssen zu Fuß rechnen:

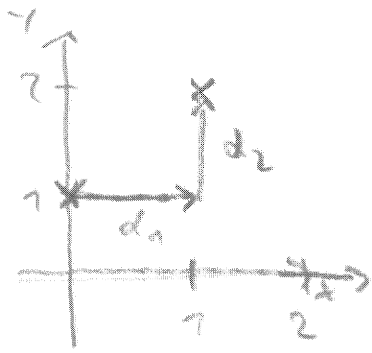
$$\int_{\gamma_1} v\,dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 - t^2 - 1 \\ (t^2+1)^2 - t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 -1 + 2t^5 + 4t^3 + 2t - 2t^2$$

$$= \frac{1}{3}t^6 + t^4 + t^2 - \frac{2}{3}t^3 - t\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 + 1 - \frac{2}{3} - 1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Die zweite Kurve parametrisieren wir stückweise:

$$\alpha_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \end{pmatrix}.$$



Also $\alpha_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\alpha_2'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

und

$$\int_{\alpha_2} v \, d\alpha = \int_0^1 v(\alpha_1(t))\, \alpha_1'(t)\, dt + \int_0^1 v(\alpha_2(t))\, \alpha_2'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ ? \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} ? \\ (1+t)^2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 t^2 - 1 \, dt + \int_0^1 2 + 2t + t^2 \, dt$$

$$= \int_0^1 2t^2 + 2t + 1 \, dt = \frac{2}{3} t^3 + t^2 + t \Big|_0^1 = \frac{2}{3} + 1 + 1 = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$

<u>Aufgabe 4</u>: $\mathbb{R}^3$ ist sternförmig, aber ist v rotationsfrei?

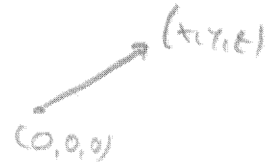
$$\operatorname{rot} v(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x + x \\ -y + y \\ -z + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Somit besitzt v auf jeden Fall Potentiale $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Es gibt mehrere Wege solche zu bestimmen:

(1) $f(x,y,z) := \int_c v \, dx$, wobei ~~z~~ c eine bel. Kurve von einem bel., festen Startpunkt (x_0, y_0, z_0) zum Punkt (x,y,z) ist.

Wählen wir z.B. $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ und c als direkte geradlinige Verbindung, wird c durch $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ parametrisiert und es



folgt

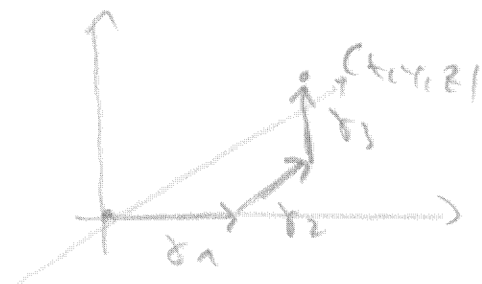
$$f(x,y,z) = \int_c v \, dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 x^2 - t^2 yz \\ t^2 y^2 - t^2 xz \\ -t^2 xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 x^3 - t^2 xyz + t^2 y^3 - t^2 xyz - t^2 xyz \, dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 (x^3 + y^3 - 3xyz) \, dt = (x^3 + y^3 - 3xyz) \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_0^1$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}(x^3 + y^3 - 3xyz)}}$$

Jede andere Kurve von einem bel. (x_0, y_0, z_0) zu (x,y,z) tut es auch. Häufig nimmt man auch hier den Weg, der aus den achsenparallelen Stücken zusammengesetzt ist, dabei entstehen viele Nullen:



$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$\gamma_1(t) = t\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} x \\ ty \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ tz \end{pmatrix}$. $\gamma_3'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

also

$$\int_C v\,dx = \int_0^1 v(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\,dt + \int_0^1 v(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\,dt + \int_0^1 v(\gamma_3(t))\cdot\gamma_3'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2x^2 \\ * \\ * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} * \\ t^2y^2 \\ * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} * \\ * \\ -xy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 t^2x^3\,dt + \int_0^1 t^2y^3\,dt + \int_0^1 -xyz\,dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3x^3\Big|_0^1 + \frac{1}{3}t^3y^3\Big|_0^1 - xyzt\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3 + y^3 - 3xyz\right).$$

(2) Direkt: Wir suchen $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $Df = v$, also

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = x^2 - yz,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = y^2 - xz,\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -xy}$$

Integrieren wir z.B. die 1. Gleichung nach ~~z~~ x und erhalten wir

(*) $f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 - xyz + c(y,z)$,

wobei c eine Funktion ist, die nur von y und z abhängt.

Leiten wir (*) nun nach y ab und benutzen die 2. Gleichung, folgt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -xz + \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) \overset{!}{=} y^2 - xz,$$

also $\frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = y^2$ und damit

$$c(y,z) = \frac{1}{3}y^3 + \tilde{c}(z),$$

und insgesamt

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xyz + \tilde{c}(z).$$

Schließlich mit der 3. Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -xy + \tilde{c}'(z) \overset{!}{=} -xy,$$

also $\tilde{c}'(z) = 0$, also $\tilde{c} = \text{const}$.

Also ist $f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xyz + \tilde{c}$ ein Potential ~~f~~ von v mit bel. $\tilde{c} \in \mathbb{R}$.