WS 2009/10
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch
Ira Neitzel

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

1. Übung zur LV Nichtlineare Optimierung

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS09/Nlopt/`

Scheinkriterien:
Für einen Übungsschein müssen zwei Kriterien erfüllt sein:

- Mindestens 50 % der Punkte der theoretischen Hausaufgaben müssen erreicht werden.
- Alle bis auf eine Programmieraufgabe müssen erfolgreich bearbeitet werden.

Die Bearbeitung der Hausaufgaben kann in festen Zweiergruppen erfolgen.
Abgabe der Programmieraufgaben:
Die Programmieraufgaben werden in Zweiergruppen in MATLAB bearbeitet. Sie sind per email an Ira Neitzel (`neitzel@math.tu-berlin.de`) zu schicken. MATLAB ist im Unixpool des Instituts verfügbar. Studenten ohne Unixpool-Account melden sich bitte bei Ira Neitzel. Es sollen folgende Konventionen eingehalten werden:

- in der email steht Nummer der Übung und der Hausaufgabe, Datum, Namen der Bearbeiter
- die Programme werden an die email angehängt
- Bitte nur lauffähige Programme schicken, also die Funktionen vorher gründlich testen. Z.B. probieren, ob nach einem Matlab-Neustart alles noch funktioniert.
- Nicht vergessen, die zur Aufgabe gehörenden Fragen in der email zu beantworten.

Hausaufgaben: (Abgabe am 23.10.2009)

1. (4 Punkte) Gesucht ist der Punkt auf der Parabel $x^2 - 4y = 0$, der dem Punkt $(0, 1)$ in der Euklidischen Norm am nächsten liegt.
   (a) Versuchen Sie das Problem zu lösen, indem die Gleichung $x^2 - 4y = 0$ verwendet wird, um x^2 aus der Zielfunktion zu eliminieren. Was passiert? Warum?
   (b) Eliminieren Sie nicht x^2 sondern y.
   (c) Verwenden Sie den aus der Analysis bekannten Lagrangezugang!
2. (3 Punkte) Es ist der maximale Wert des geometrischen Mittels von n positiven Zahlen bei gegebenem arithmetischen Mittel dieser Zahlen zu bestimmen. Was läßt sich daraus für die Beziehung von geometrischen und arithmetischen Mittel ableiten?
3. (3 Punkte) Zeigen Sie: $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, d.h. $x^T H x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, wenn ein $\alpha > 0$ existiert, so daß $x^T H x \geq \alpha \|x\|_2^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.
4. (2 Punkte) Zeigen Sie: Ist H positiv definit, so ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2} x^T H x + b^T x$ streng konvex.
5. (3 Punkte) Schreiben Sie die Funktion
   $$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1 x_2 - 4x_1 - 2x_2 + 3$$
   in der Form $f(x) = \frac{1}{2} x^T H x + b^T x + c$ mit symmetrischer Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ist H positiv definit? Berechnen Sie das globale Minimum von f.