WS 2009/10
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch
Ira Neitzel

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

2. Übung zur LV Nichtlineare Optimierung

Hausaufgaben: (Abgabe am 30.10.2009)

1. (3 Punkte ,vgl. Folgerung 1.4.1) Zeigen Sie, daß für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$ und beliebiges $w \in \mathbb{R}^n$ die Niveaumenge $\mathcal{N}(f, f(w))$ kompakt ist.
2. (2 Punkte, vgl. Beispiel 1.4.1) Zeigen Sie: Ist H positiv definit, so gilt für die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + b^T x$: $\lim\limits_{||x||\to\infty} f(x) = \infty$.
3. (2 Punkte) Wir bezeichnen mit $\| \cdot \|$ eine beliebige Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|$ konvex ist. Ist f strikt konvex?
4. (3 Punkte) Zeigen Sie: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x$ ist konvex, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2$ ist strikt konvex, $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^3$ ist nicht konvex. Kann der Definitionsbereich von h eingeschränkt werden, so dass h konvex wird?
5. (1+1+3) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig-differenzierbare Funktion. Wir nehmen an, daß x^* ein lokales Minimum von f entlang jeder Geraden durch x^* ist. Das heißt, die Funktion
$$g_d(\alpha) = f(x^* + \alpha d)$$
hat für jede Richtung $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein lokales Minimum bei $\alpha = 0$.
   (a) Zeigen Sie, daß gilt $\nabla f(x^*) = 0$.
   (b) Es sei $\hat{x}$ ein lokales Minimum von f. Zeigen Sie, daß $\hat{x}$ ein lokales Minimum von f entlang jeder Geraden durch $\hat{x}$ ist.
   (c) Die Umkehrung gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.
   Wir betrachten die Funktion $f(x_1, x_2) = (x_2 - px_1^2)(x_2 - qx_1^2)$ mit $0 < p < q$. Zeigen Sie, daß $x^* = (0, 0)$ ein lokales Minimum entlang jeder Geraden durch x^* ist. Zeigen Sie, daß x^* *kein* lokales Minimum von f ist. Hinweis: Untersuchen Sie f an den Punkten (y, my^2) für $p < m < q$ und $y \neq 0$.

Programmieraufgabe: (per email bis zum 06.11.09)

Programmieren Sie das aus der Vorlesung bekannte Simplexverfahren von Nelder und Mead. Das Programm soll den folgenden Kopf haben:

```
[xopt,fxopt,it]=nelder_mead(f,x0,alpha,beta,gamma,itmax, tol)
```

Die zu minimierende Funktion soll in einem eigenen `m-file` vorliegen. Dann bezeichnet `f` den Namen des entsprechenden `m-files`, `x0` den Startvektor, `alpha,beta,gamma` die bekannten Verfahrensparameter, `itmax` die maximale Iterationsanzahl, und `tol` eine Abbruchtoleranz. Das Verfahren soll abgebrochen werden, wenn entweder $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(f(x^{(k,i)}) - \bar{f}_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} < tol$, gilt, wobei $\bar{f}_k := \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(x^{(k,j)})$, oder wenn die maximale Iterationszahl erreicht ist. Rückgabeparameter sollen die Optimalstelle `xopt`, der dazugehörige Zielfunktionswert `fxopt=`$f(xopt)$, sowie die Iterationsanzahl `it` sein.

Versuchen Sie, mit Ihrem Verfahren Minima der Beispiele 1.6.2 bis 1.6.5 aus dem Skript zu bestimmen.

Die lauffähigen Programme sind (mit allen verwendeten Hilfsprogrammen (Funktionsdefinitionen!)) bis zum 6.11.09 an neitzel@math.tu-berlin.de zu schicken. Die Ergebnisse sind zu dokumentieren (verwendete Parameter und Ergebnisse, Kommentare und Erklärungen) und in Papierform gemeinsam mit den theoretischen Hausaufgaben von Blatt 3 am 6.11.09 abzugeben.