WS 2009/10
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch
Ira Neitzel

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

3. Hausaufgabe zur LV Nichtlineare Optimierung

Abgabe am 06.11.2009

1. (3+4+1+1+3 Punkte) Wir wollen folgendes Problem untersuchen:
   In der Ebene ist ein Punkt x so zu bestimmen, dass die Summe der Abstände von x zu drei gegebenen Punkten $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$ minimal wird.

   (a) Formulieren Sie dieses Problem als Optimierungsaufgabe im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie die Existenz einer Lösung x^*. Ist diese eindeutig?

   (b) Sei $x^* \neq x_i$, $i = 1 \ldots 3$. Finden Sie mit Hilfe der notwendigen Optimalitätsbedingung erster Ordnung und geometrischer Überlegungen diesen Punkt x^* im Dreieck x_1, x_2, x_3. Zeigen Sie, dass dann alle Innenwinkel des Dreiecks x_1, x_2, x_3 kleiner als 120^o sind.

   (c) Was ist, wenn einer dieser Innenwinkel $> 120^o$ wird?

   (d) Finden Sie ein Beispiel, wo der gesuchte Punkt *nicht* mit dem Schwerpunkt übereinstimmt. Der Schwerpunkt minimiert die Summe der Quadrate der Abstände zu den drei gegebenen Punkten.

   (e) Lösen Sie das Problem mit dem von Ihnen programmierten Verfahren von Nelder-Mead für

(i)	$x_1 = (0,0)$,	$x_2 = (0,1)$,	$x_3 = (1,0)$,
(ii)	$x_1 = (0,0)$,	$x_2 = (10,1)$,	$x_3 = (1,0)$,
(iii)	$x_1 = (0,0)$,	$x_2 = (0.5, \sqrt{3}/2)$,	$x_3 = (1,0)$.

2. (2 Punkte) Zeigen Sie: Für eine konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind die Niveaumengen konvex. Gilt auch die Umkehrung?

3. (1 Punkt) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und streng konvex. Zeigen Sie:
   $\nabla f(x) = \nabla f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Freiwillige Programmieraufgabe: (per email bis zum 06.11.09)
Programmieren Sie das Verfahren Simulated Annealing unter Matlab. Das Programm soll den folgenden Kopf haben:

```
x=simulated_annealing(f,x0).
```

Die zu minimierende Funktion soll in einem eigenen `m-file` vorliegen. Dann bezeichnet `f` den Namen des entsprechenden `m-files`, und `x0` den Startvektor.
Die Änderung der aktuellen Iterierten x^k ist wie folgt zu implementieren:

- Es wird eine Komponente i zufällig aus allen Komponenten von x^k ausgewählt
- Diese wird zufällig verändert, $x_i^{k+1} = x_i^k + \delta^k$, wobei δ^k eine Zufallsvariable mit Mittelwert 0 ist, die einem von Ihnen zu wählenden Verteilungsgesetz gehorchen soll.

Die Temperatur soll immer nach einer festen Anzahl N_a von akzeptierten Lösungen um einen Faktor ρ, $0 < \rho < 1$, abgekühlt werden, also $T^{l+1} = T^l \cdot \rho$.
Wählen Sie ein geeignetes Abbruchkriterium.

1. Versuchen Sie, mit diesem Verfahren ein globales Minimum der folgenden Funktionen in dem angegebenen Definitionsbereich zu finden (zum Vergleich ist der minimale Funktionswert $f*$ angegeben):

   $$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad -5 \le x_i \le 5, \qquad f_1^* = 0,$$

   $$f_2(x) = -\frac{\sin^2\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)}{1 + 0.001 * \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2}, \qquad -5 \le x_i \le 5, \qquad f_2^* = -0.9940069.$$

   Dabei soll der Startwert x^0 zufällig im Definitionsbereich gewählt werden.

2. Untersuchen Sie das Verhalten des Verfahrens für die Dimensionen $n = 2,\ 10,\ 20$ für verschiedene Parameter ρ und N_a. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.