WS 2009/10 | Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch | Fakultät II
Ira Neitzel | Institut für Mathematik

4. Hausaufgabe zur LV Nichtlineare Optimierung

Abgabe am 13.11.2009

1. (2+2+3+2+3 Punkte) Wir betrachten nun das in der Vorlesung eingeführte einfache Gradientenverfahren (4.5.1) für die quadratische Optimierungsaufgabe

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + b^T x + c \tag{1}$$

mit symmetrisch und positiv definiter Matrix $H \in \mathbb{R}^{n,n}$. Die Abstiegsrichtung ist $d_k := -g_k$ mit $g_k := \nabla f(x_k)$, und als Schrittweite σ_k wählen wir die exakte Schrittweite. Es sei x^* die Lösung der Optimierungsaufgabe. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ mit $d_k \neq 0$. Zeigen Sie:

   (a) Es gilt $\sigma_k := \text{argmin}_{\sigma \in \mathbb{R}^+} f(x_k - \sigma g_k) = \dfrac{g_k^T g_k}{g_k^T H g_k}$.

   (b) Zwei aufeinanderfolgende Suchrichtungen d_{k+1}, d_k sind zueinander orthogonal.

   (c) Für den Fehler $e_k := x_k - x^*$ gilt: $\|e_{k+1}\|_2^2 \leq \|e_k\|_2^2 - \sigma_k e_k^T H e_k$.
   Hinweis: Benutzen Sie die Ungleichung $x^T x \leq \left(x^T Hx\right)^{1/2} \left(x^T H^{-1} x\right)^{1/2}$.

   Wir definieren die Energienorm als $\|x\|_H := \left(x^T H\, x\right)^{1/2}$. Zeigen Sie:

   (d) Es gilt $f(x) = \frac{1}{2}\|x - x^*\|_H^2 + f(x^*)$ bzw. $\|x - x^*\|_H^2 = 2\,[f(x) - f(x^*)]$.

   (e) Für $E(x) := \frac{1}{2}\|x - x^*\|_H^2$ gilt: $\nabla f(x) = \nabla E(x)$. Wofür ist E ein Maß?

2. (3 Punkte) Wie in der Übung betrachten wir nun das Gradientenverfahren mit konstanter Schrittweite $\hat{\sigma}$ zur Lösung des Optimierungsproblems $\min f(x)$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sei $f(x) = \|x\|^{2+\beta}$ mit $\beta > 0$. Geben Sie Bedingungen an, für welche Werte von $\hat{\sigma}$ und x_0 das Gradientenverfahren mit konstanter Schrittweite konvergiert/divergiert.

Programmieraufgabe: (per email bis zum 13.11.09)
Implementieren Sie ein Gradientenabstiegsverfahren zur Minimierung einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit Schrittweitenberechnung nach Armijo. Verwenden Sie ein passendes Abbruchkriterium. Die Funktion soll den folgenden Kopf haben:

```
[x,it]=grad_verfahren(f,gradf,x0,itmax,tol).
```

Dabei sind `f` und `gradf` Strings, die die zu minimierende Funktion bzw. deren Gradienten bezeichnen, `x0` der Startvektor, `itmax` die maximale Iterationsanzahl, sowie `tol` die Abbruchtoleranz. Rückgabewerte sind die berechnete optimale Lösung `x` und die Anzahl der Iterationen `it`. Zweckmäßiger Weise soll die Schrittweitenberechnung in ein eigenes m-file ausgelagert werden. Wählen Sie $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$, $\sigma_0 = 1$, $\gamma = 1$, sowie verschiedene Werte für δ. Testen Sie das Verfahren mit der Rosenbrockfunktion (Beispiel 1.6.2 im Skript). Verwenden Sie als Startpunkt den Vektor $(-1.9, 2)^T$ und verschiedene Abbruchtoleranzen. Wieviele Iterationen benötigt das Verfahren für eine vernünftige Approximation der Lösung?

Versuchen Sie, das globale Minimum der Rosenbrock-Funktion mit Hilfe des Newton-Verfahrens zu finden. Implementieren Sie das Verfahren dazu in einer Matlab-Funktion, die mit

```
[x,it]=newton_verfahren(f,gradf,hessf,x0,itmax,tol)
```

aufgerufen werden kann. Verwenden Sie ein geeignetes Abbruchkriterium. Dabei ist `hessf` ein String, der die Hessematrix $\nabla^2 f$ bezeichnet. Wieviele Iterationen werden benötigt?