

5. Hausaufgabe zur LV Nichtlineare Optimierung

Abgabe am 20.11.2009

1. (3 Punkte) Verallgemeinern Sie die Formel für die exakte Schrittweite σ_e des Gradientenverfahrens auf das 'verallgemeinerte' Gradientenverfahren

$$x_{k+1} := x_k + \sigma_k D_k d_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

mit $d_k := -\nabla f(x_k)$ und einer symmetrischen positiv definiten Matrix $D_k \in \mathbb{R}^{n,n}$.

2. (3 Punkte) Beweisen Sie Lemma 4.2.2 der Vorlesung: Ist A eine nichtsinguläre n, n -Matrix, S eine Matrix gleichen Typs und $\|A^{-1}\| \|S\| < 1$, dann existiert $(A + S)^{-1}$ und

$$\|(A + S)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|S\|}.$$

3. (5 Punkte) Beweisen Sie (vgl. Lemma 4.6.1): Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ positiv definit. Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\nabla f(x) \neq 0$, dann löst $\tilde{d} = \frac{-A^{-1} \nabla f(x)}{\|A^{-1} \nabla f(x)\|}$ die Aufgabe

$$\min_{\|d\|_A=1} \nabla f(x)^T d.$$

4. (4 Punkte) Es sei $A^{(0)} \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrisch und positiv definite Matrix. Für $k \geq 1$ werden Updates $\tilde{A}^{(k)}$ gemäß Formel (4.37) im Skript bestimmt. Zeigen Sie: Es gilt $\tilde{A}^{(k)} s^{(k)} = 0$ für alle $k \geq 1$, und alle Updates $\tilde{A}^{(k)}$ sind positiv semidefinit.

Programmieraufgabe: (per email bis zum 20.11.09)

Programmieren Sie das BFGS-Verfahren für quadratische Optimierungsprobleme. Gebe Sie eine genaue Beschreibung der verwendeten Eingabe- und Rückgabeparameter an. (Hinweis: Kommentarzeilen zu Beginn einer Matlab-Funktion können mit dem Befehl `help Funktionsname` im Matlab-Command-Window angezeigt werden, wobei 'Funktionsname' eben der Name der Matlab-Funktion ist.) Verwenden Sie das Powell-Verfahren zur Schrittweitensuche mit den Parametern $\delta = 0.01$ und $\beta = 0.9$. Wenden Sie das Verfahren auf die folgenden Funktionen an:

1. Rosenbrock-Funktion,
2. (Beale) $f(x) = (1.5 - x_1(1 - x_2))^2 + (2.25 - x_1(1 - x_2^2))^2 + (2.625 - x_1(1 - x_2^3))^2$,
3. (Spellucci) $f(x) = 2x_1^3 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + 4x_1 x_2 + 3$

Wie verhält sich das Verfahren im Vergleich zum Newtonverfahren von Übungsblatt 4?