WS 2009/10 | Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch | Fakultät II
Ira Neitzel | Institut für Mathematik

7. Hausaufgabe zur LV Nichtlineare Optimierung

Abgabe am 4.12.2009

1. (3 Punkte) Zeigen Sie: Die Lösung des Problems
$$\min_{u\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x-u\|_2^2, \qquad Au = 0$$
ist gegeben durch $u = (I - A^T(AA^T)^{-1}A)x$. Dabei ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m < n$ mit vollem Rang.

2. (3 Punkte) Gegeben sind zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i \leq b_i$ für alle $i = 1\dots n$. Die konvexe Menge C ist definiert als $C = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \quad \forall i = 1\dots n\}$. Berechnen Sie $P_C(x)$.

3. (5 Punkte) Gegeben sei folgendes Minimierungsproblem:
$$\begin{cases} \min f(x) = x_1^2 + (x_2 - x_3)^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}.$$
Berechnen Sie eine Nullraummatrix der Gleichungsnebenbedingungen. Überführen Sie damit dieses Problem in ein unrestringiertes, und berechnen Sie die stationären Punkte. Untersuchen Sie, ob lokale Extrema vorliegen.

4. (4 Punkte) Gegeben sei das Problem
$$\max_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 + 2x_2, \quad 2x_1 - x_2 = 4.$$
Berechnen Sie einen stationären Punkt der Lagrangefunktion. Ist dieser Punkt auch eine lokale Lösung des Problems?

Programmieraufgabe: (per email bis zum 11.12.09) Mathematisches Pendel

Wir betrachten noch einmal das in Vorlesung und Übung behandelte Optimalsteuerungsproblem
$$(QS)\begin{cases} \min & \frac{1}{2}\|z(T)\|^2 + \frac{\nu}{2}\int_0^T u^2(t)dt \\ \text{s.t.} & \dot{z} = Az + Bu, \quad z(0) = z_0 \\ & u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \quad \forall t \in [0,T], \end{cases}$$
wobei
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \phi \\ \omega \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix}.$$
Überführen Sie (QS) durch Diskretisierung in ein endlichdimensionales Optimierungsproblem und lösen Sie dieses mit Hilfe des Matlab-Befehls *quadprog* aus der Matlab Optimization Toolbox. Wählen Sie $c = 1$ und $\nu = 10^{-3}$ fest. Testen Sie das Programm zunächst mit einer Anfangsauslenkung $\phi_0 = \frac{\pi}{36}$, einer Anfangsgeschwindigkeit $\omega_0 = 0$ und Steuerschranken $u_{min} = -1$, $u_{max} = 1$ für $T = 1$ bei einer angemessenen Diskretisierung. Wählen Sie dann $u_{min} = -0.3$, $u_{max} = 0.3$. Stellen Sie die berechnete optimale Steuerung $\bar{u}$ sowie die Zustände $\bar{\phi}$ und $\bar{\omega}$ für beide Situationen graphisch dar. Variieren Sie dann sowohl die Anfangswerte als auch die Schranken an die Steuerung, sowie den Endzeitpunkt. Kommentieren Sie interessante Ergebnisse.