Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

9. Hausaufgabe zur LV Nichtlineare Optimierung

Abgabe am 18.12.2009

1. (6 Punkte) Wir betrachten zunächst eine parameterabhängige quadratische Optimierungsaufgabe:
$$\min \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x, \quad a \le x \le b.$$
Hier ist $H \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix. Die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ genügen der Bedingung $a_i \le b_i$ $\forall i = 1 \dots n$. Der Vektor c ist der Parameter. Für gegebenes c bezeichne $x(c)$ die Lösung des Optimierungsproblems.

   (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $c \mapsto x(c)$ Lipschitz-stetig ist, d.h. es existiert eine Konstante $L > 0$, die nicht von c oder $x(c)$ abhängt, so dass gilt
$$\|x(c_1) - x(c_2)\| \le L\|c_1 - c_2\| \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

   (b) Dieses Ergebnis kann man zur Fehlerabschätzung benutzen: Es sei $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Weiter sei $\tilde{x}$ mit $a \le \tilde{x} \le b$ eine Näherungslösung der Optimierungsaufgabe, die mit einem Vektor δ die Variationsungleichung
$$(H\tilde{x} + c + \delta)^T (x - \tilde{x}) \ge 0 \quad \forall x : a \le x \le b \tag{2}$$
erfüllt. Wie kann man den Abstand von $\tilde{x}$ zur Lösung $x(c)$ durch die Norm von δ abschätzen?

   (c) Wie kann man bei gegebenem, zulässigem $\tilde{x}$ den Vektor δ berechnen, dass (2) erfüllt ist?

2. (5 Punkte) Finden Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die reellen Zahlen r, s, t, damit das lineare Optimierungsproblem
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \max \\ rx_1 + sx_2 &\le t \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$
(a) eine Lösung besitzt, (b) gar keine zulässigen Punkte hat, (c) unbeschränkt ist.

3. (4 Punkte) Lösen Sie die folgende lineare Optimierungsaufgabe grafisch, und geben Sie alle optimalen Lösungen an:
$$\begin{aligned} 4x + 6y &\to \min \\ x + 4y &\le 22 \\ 2x + 3y &\le 19 \\ 3x + 2y &\le 21 \\ x, y &\ge 0. \end{aligned}$$

Programmieraufgabe: (per email bis zum 8.1.10)
Programmieren Sie das Gradientenprojektionsverfahren zur Lösung der Aufgabe
$$\min_{x \in C} \sin(x_1)\cos(3x_2),$$
wobei die konvexe Menge C gegeben ist durch $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1,\, x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0\}$, vgl.HA 8.2.

Wie beim einfachen Gradientenverfahren für unberestringierte Probleme wird beim Gradientenprojektionsverfahren $d^k = -\nabla f(x^k)$ als Abstiegsrichtung gewählt. Allerdings muss die Zulässigkeit der Punkte x^k sichergestellt werden. Daher wird eine Schrittweite σ akzeptiert, wenn $f(P_C(x^k + \sigma d^k)) \leq f(x^k) - \frac{\delta}{\sigma}\|P_C(x^k + \sigma d^k) - x^k\|_2^2$ ist. Dann wird $x^{k+1} = P_C(x^k + \sigma d^k)$ gesetzt und weiteriteriert, siehe auch [C.T. Kelley. *Iterative methods for optimization.* SIAM, Philadelphia, 1999.]

Verwenden Sie ein geeignetes Abbruchkriterium.

Ein Nachteil des Verfahrens ist, dass die Projektion auf C berechnet werden muss. Es kann also nur bedingt zur Lösung restringierter Optimierungsprobleme benutzt werden.