WS 2009/10
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch
Ira Neitzel

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

11. Hausaufgabe zur LV Nichtlineare Optimierung

Abgabe am 22.01.2010
Wir betrachten noch einmal das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min\ f(x) &= \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x \\ a_i \le x_i &\le b_i \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei ist $H \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine positiv definite und symmetrische Matrix, die Vektoren a, b, c sind ebenfalls aus dem $\mathbb{R}^n$ und genügen der Bedingung $a_i < b_i$ für alle i.
Wir führen die Menge der aktiven Ungleichungsnebenbedingungen ein

$$\mathcal{A}(x) := \{i :\ x_i = a_i \text{ oder } x_i = b_i\}$$

und betrachten das schon in der Übung besprochen *Aktive-Mengen-Verfahren*:

(1): Anfangsnäherung x^0 gegeben, setze $k := 0$

(2): Ermittle $\mathcal{A}(x^k)$

(3): Berechne $\tilde{x}^{k+1}$ als Lösung von

$$\begin{aligned} \min\ \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x \\ x_i = x_i^k \ \text{ für } i \in \mathcal{A}(x^k) \end{aligned} \tag{2}$$

(4): Ein projizierter Gradientenschritt

$$x^{k+1} := \mathrm{Proj}_{[a,b]}\left(\tilde{x}^{k+1} - \rho\,\nabla f(\tilde{x}^{k+1})\right)$$

(5): Abbruch der Iteration falls

- $\|x^{k+1} - x^k\|$ oder $\|x^{k+1} - \tilde{x}^{k+1}\|$ hinreichend klein oder
- $\mathcal{A}(x^{k+1}) = \mathcal{A}(x^k)$ und $x_i^{k+1} = x_i^k$ für alle $i \in \mathcal{A}(x^{k+1}) = \mathcal{A}(x^k)$,

sonst $k := k + 1$ und zurück zu (2).

Der Parameter $\rho > 0$ hat (theoretisch) keinen großen Einfluss auf die Konvergenz des Verfahrens. Er sollte in der Größenordnung des kleinsten Eigenwertes von H liegen.

1. (3 Punkte)
   Berechnen Sie die Lösung von Aufgabe (3a) von Blatt 8 mit Hilfe dieses aktive-Mengen-Verfahrens. Geben Sie alle Zwischenschritte an. Verwenden Sie als Startwert $x^0 = (0, 0)^T$.
   Hinweis: das Verfahren konvergiert in zwei Schritten.

2. (2 Punkte) Sei nun $\bar{x}$ die Lösung von (1). Zeigen Sie: sind die aktive Menge $\mathcal{A}(\bar{x})$ und die Werte von $\bar{x}$ auf dieser aktive Mengen bekannt, dann ist die Lösung $\tilde{x}$ von

$$\begin{aligned} \min\ \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x \\ x_i = \bar{x}_i \ \text{ für } i \in \mathcal{A}(\bar{x}) \end{aligned} \tag{3}$$

   zulässig, also $a \le \tilde{x} \le b$, und es gilt $\tilde{x} = \bar{x}$. Das bedeutet, das Verfahren konvergiert dann in einem Iterationsschritt.

3. (2 Punkte) Zeigen Sie: Es gilt nach Schritt (3) des Verfahrens $\left[\nabla f(\tilde{x}^{k+1})\right]_i = 0$ für die inaktiven Indizes $i \notin \mathcal{A}(x^k)$.

4. (3 Punkte) Zeigen Sie: Gilt in einem Schritt k des Verfahrens $\mathcal{A}(x^k) = \mathcal{A}(x^{k+1})$ und $x_i^k = x_i^{k+1}$ für $i \in \mathcal{A}(x^k)$, dann ist x^{k+1} die Lösung des Problems (1).

5. (5 Zusatzpunkte) Gegeben sei eine symmetrische und positiv definite Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ sowie ein Vektor $b \neq 0$. Man löse durch Untersuchung der notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen das Problem

$$\max b^T x, \quad x^T Q x \leq 1.$$

Verwenden Sie das Ergebnis, um die Ungleichung

$$(b^T x)^2 \leq (x^T Q x)(b^T Q^{-1} b)$$

zu beweisen.

Programmieraufgabe: (per email bis zum 29.01.10)

Programmieren Sie die Aktive-Mengen-Strategie in Matlab für das Problem (1). Es soll dabei folgende Funktion entstehen:

```
x=quadbox(H,c,x0,a,b),
```

welche als Parameter die Matrix H, Vektoren a, b, c und den Startwert x_0 übergeben bekommt. Beachten Sie, dass die Schranken auch $\pm\infty$ annehmen können, um den unbeschränkten Fall zu simulieren.
In jedem Iterationschritt soll die Anzahl der aktiven Indizes ausgegeben werden.
Auf der Homepage wird eine Datei bereitgestellt werden, die Daten für ein Testbeispiel enthält. Testen Sie ihr Programm für dieses Beispiel. Lösen Sie das Testbeispiel zum Vergleich mit einer passenden Optimierungsroutine aus der Matlab Optimization Toolbox.