WS 2009/10 Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch Fakultät II
Ira Neitzel Institut für Mathematik

12. Hausaufgabe zur LV Nichtlineare Optimierung

Abgabe am 29.01.2010
Wir betrachten einfache Optimierungsverfahren zur Lösung des Problems

$$\min f(x), \quad h(x) = 0,\ g(x) \le 0.$$

1. (5 Punkte) Wir betrachten die Aufgabe

$$\min xy, \quad -2x + y + 3 \ge 0$$

   (a) Zeigen Sie: Diese Aufgabe hat keine globale Lösung. Dafür ist der Punkt $(3/4, -3/2)$ eine lokale Lösung. Zeigen Sie weiterhin, daß dieser Punkt die notwendigen Bedingungen erster Ordnung und die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung erfüllt.

   (b) Berechnen Sie globale und lokale Minima von $F_c(x)$ für $c > 0$. Was können Sie über das Verhalten dieser Minima für $c \to \infty$ aussagen?

2. (5 Punkte) Gegeben ist das Problem

$$\min \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) - 3x_2, \quad x_2 = 0.$$

   (a) Berechnen Sie die globale Lösung mit dem dazugehörenden Lagrange-Multiplikator.

   (b) Berechnen und vergleichen Sie für $k = 1, 2, 3$ and $c^k = 10^k$ die Iterierten der Penalty-Methode und der Multiplikatoren-Methode mit $\lambda^1 = 0$.

Zur Erinnerung:

Algorithmus: Penalty-Verfahren

1. Wähle $c^1 > 0$, $k := 1$.
2. Berechne x^k als *globale* Lösung von

$$\min F_{c^k}(x) := f(x) + \frac{c_k}{2}\sum_{i=1}^{m} |h_i(x)|^2 + \frac{c_k}{2}\sum_{j=1}^{p} (\max\{0,\ g_j(x)\})^2$$

3. Ende, falls x^k zulässig ist.
4. Wähle $c^{k+1} > c^k$, $k := k + 1$, zurück zu Schritt 2,

Multiplikatoren-Methode: (für Probleme ohne Ungleichungsrestriktionen)

1. Wähle $c^1 > 0$, λ^1, $k := 1$
2. Berechne x^k als globales Minimum von $L_{c^k}(\cdot, \lambda^k) := f(x) + {\lambda^k}^T h(x) + \frac{c_k}{2}\|h(x)\|^2$.
3. Update des Multiplikators: $\lambda^{k+1} := \lambda^k + c^k h(x^k)$.
4. Wähle $c^{k+1} > c^k$, $k := k + 1$, zurück zu Schritt 2.

Programmieraufgabe: (per email bis zum 05.02.10)
Programmieren Sie das Penalty-Verfahren. Nutzen Sie zur Lösung der unrestringierten Teilprobleme schon von Ihnen programmierte Verfahren.
Der Penaltyparameter soll in jedem Schritt um einen Faktor vergrößert werden, $c^{k+1} = \beta c^k$ mit $c^1 = 1$ und $\beta = 10$. Als Abbruch verwenden Sie bitte:

$$\sum_{i=1}^{m} |h_i(x^k)|^2 + \sum_{j=1}^{p} \big(\max\{0,\, g_j(x^k)\}\big)^2 \leq \epsilon$$

mit $\epsilon = 10^{-5}$.
Lösen Sie mit dem Penalty-Verfahren die Aufgabe

$$\begin{cases} \min f(x) = 10(x_1 - 3.5)^2 + 20(x_2 - 4)^2 & \\ \qquad x_1 + x_2 \leq 6 & x_1 - x_2 \geq 1 \\ \qquad 2x_1 + x_2 \geq 6 & 0.5x_1 - x_2 \leq 1 \\ \qquad x_1 \geq 1 & x_2 \geq 1. \end{cases}$$