Technische Universität Berlin **WS 2009/10**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Wolfgang König Ausgabe: Do 15.10.2009
Assistent: Matthias Steinrücken Abgabe: Do 22.10.2009

1. Übungsblatt „Stochastische Modelle“
Markovketten in diskreter Zeit

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Seien I und J abzählbare Mengen und sei $f\colon I \times J \to I$ eine Abbildung. Sei weiter $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Werten in J. Mit einem $x \in I$ definieren wir eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $X_0 = x$ und $X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette ist und bestimmen Sie die Übergangsmatrix.

2. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}\{X_1 = 1\} = p \in (0,1)$ und $\mathbb{P}\{X_1 = -1\} = 1 - p$. Ferner seien $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ und $M_n := \max\{S_k : 0 \le k \le n\}$.

(i) Zeigen Sie, dass S_n und $Y_n := M_n - S_n$ Markovketten sind und bestimmen Sie ihre Zustandsräume sowie ihre Übergangsmatrizen.

(ii) Zeigen Sie, dass $M_n = Y_n + S_n$ keine Markovkette ist (dass heisst, dass die Summe zweier Markovketten im allgemeinen keine Markovkette ist).

3. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Zustandsraum I und Übergangswahrscheinlichkeiten $(p_{i,j})_{i,j\in I}$ und sei $Y_n := (X_n, X_{n+1})$. Ferner sei T die Menge der Paare (i,j) mit $p_{i,j} > 0$. Zeigen Sie, dass $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum T ist und berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichtkeiten.

4. Hausaufgabe: (Randomisiertes Ehrenfest-Model) **4 Punkte**
Insgesamt N Kugeln seien in zwei Behältern A und B. Es sei ein Parameter $p \in (0,1)$ gegeben und Z_n sei die Anzahl der Kugeln in A zum Zeitpunkt n, also sind $N - Z_n$ Kugeln in B. Um vom Zustand zum Zeitpunkt n zum Zustand zum Zeitpunkt $n+1$ zu gelangen wählen wir unter allen Kugeln uniform eine aus und geben sie mit Wahrscheinlichkeit p in den Behälter A und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ in den Behälter B. Alle Ziehungen und Zurücklegungen seien unabhängig, also ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $I = \{0, 1, \ldots, N\}$.

(i) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix der Kette $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(ii) Sei Z_0 binomialverteilt auf I mit Parameter p. Bestimmen Sie die Verteilung von Z_n für jedes n.