Technische Universität Berlin **WS 2009/10**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Wolfgang König Ausgabe: Do 17.12.2009
Assistent: Matthias Steinrücken Abgabe: Do 7.1.2010

10. Übungsblatt „Stochastische Modelle“
MKSZ

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: **4 Punkte**

Es sei $(X(t))_{t\geq 0}$ eine Markovkette in stetiger Zeit auf einem abzählbaren Zustandsraum I. Für die Q-Matrix Q nehmen wir an, dass $\sum_{j\in I\setminus\{i\}} q_{i,j} = -q_{i,i} \in (r,R)$ für alle $i \in I$ gilt, wobei $0 < r \leq R < \infty$. Für $A \subset I$ definieren wir $H_A := \inf\{t \geq 0 \colon X(t) \in A\}$, $P_j = \mathbb{P}(H_A < \infty | X(0) = j)$ und $E_j = \mathbb{E}[H_A | X(0) = j]$. Zeigen Sie:

(i) $\sum_{k\in I} q_{j,k} P_k = 0$ für alle $j \notin A$.

(ii) $(E_j)_{j\in I}$ ist die minimale nicht-negative Lösung von

$$E_j = 0, \quad \text{falls } j \in A, \qquad 1 + \sum_{k\in I} q_{j,k} E_k = 0, \quad \text{falls } j \notin A.$$

2. Hausaufgabe: **4 Punkte**

Es sei die folgende Übergangsmatrix auf dem Zustandsraum $I = \{0, 1\}$ gegeben:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Zeigen Sie, dass es genau dann eine Markov'sche Standardhalbgruppe $(P(t))_{t\geq 0}$ auf I mit der Eigenschaft $P(1) = P$ gibt, wenn $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Berechnen Sie in diesem Fall $(P(t))_{t\geq 0}$.

3. Hausaufgabe: **4 Punkte**

Es sei I eine nicht-leere abzählbare Menge und $\partial \notin I$. Ferner sei $(P(t))_{t\geq 0}$ eine submarkov'sche Halbgruppe auf I. Für $t > 0$ sei $R(t)$ definiert durch

$$R_{i,j}(t) := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = \partial = j, \\ 0, & \text{falls } i = \partial \neq j, \\ 1 - \sum_{k\in I} p_{i,k}(t), & \text{falls } i \neq \partial = j, \\ p_{i,j}(t), & \text{falls } i, j \neq \partial. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass $(R(t))_{t>0}$ eine Markov'sche Halbgruppe auf $I \cup \{\partial\}$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Fortsetzung $(R(t))_{t>0}$ von $(P(t))_{t>0}$ auf $I \cup \{\partial\}$ die einzig mögliche ist, genau dann wenn $(P(t))_{t>0}$ nicht Markov'sch auf I ist.

4. Hausaufgabe: **4 Punkte**

Betrachten Sie den Geburts- und Todesprozess mit positiven Geburtsraten λ_n und Todesraten μ_n für alle $n \geq 1$, sowie $\lambda_0 > 0$ und $\mu_0 = 0$. Es sei T_r der Zeitpunkt des ersten Erreichens des Wertes $r+1$. Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert von T bei Start in 0 gilt:

$$\mathbb{E}_0(T_r) = \sum_{n=0}^{r} \frac{1}{\lambda_n \cdot \pi_n} \sum_{k=0}^{n} \pi_k \quad \text{mit} \quad \pi_0 := 1, \pi_k := \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}.$$

Hinweis: Bestimmen Sie rekursiv $\mathbb{E}_n(T_n)$ und benutzen Sie $\mathbb{E}_0(T_r) = \sum_{n=0}^{r} \mathbb{E}_n(T_n)$.