Technische Universität Berlin **WS 2009/10**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Wolfgang König Ausgabe: Do 22.10.2009
Assistent: Matthias Steinrücken Abgabe: Do 29.10.2009

2. Übungsblatt „Stochastische Modelle“
Markovketten in diskreter Zeit

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: (Rekurrenz ist Klasseneigenschaft) **4 Punkte**
Sei P eine stochastische Matrix auf einer höchstens abzählbaren Menge I. Seien $i, j \in I$ mit $i \leftrightsquigarrow j$. Zeigen Sie, dass i genau dann rekurrent ist, wenn es j ist.

2. Hausaufgabe: (Diffusionsmodell von Bernoulli-Laplace) **4 Punkte**
In zwei Behältern A und B befinden sich s schwarze und w weiße Kugeln ($w \leq s$), wobei s Kugeln in Behälter A liegen. Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ wird aus beiden Behältern zufällig und unabhängig voneinander je eine Kugel gezogen und in den jeweils anderen Behälter gelegt. Die Zufallsvariable X_n beschreibe die Anzahl der weißen Kugeln in A nach dem Zeitpunkt n.

(i) Ermitteln Sie die Übergangsmatrix der Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(ii) Sei nun die Startverteilung

$$\nu(i) = \frac{\binom{s}{i}\binom{w}{w-i}}{\binom{s+w}{w}}, \qquad i = 0, 1, \dots, w,$$

gegeben. Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Verteilung von X_n.

3. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Berechnen Sie zur Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \qquad p, q \in (0,1),$$

die n-fache Potenz P^n für jedes $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Limes $\lim_{n\to\infty} P^n$, falls dieser existiert.

Hinweis: Diagonalisieren Sie P oder finden Sie geeignete rekursive Gleichungen.

4. Hausaufgabe: (Transienz der asymmetrischen Irrfahrt) **2 Punkte**
$X_1, X_2, \dots$ sei eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X_1 = -1) = q = 1 - p$, wobei $p \in (0,1)$ und $p \neq \frac{1}{2}$. Die asymmetrische Irrfahrt ist definiert durch $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und $S_0 = 0$ fast sicher. Zeigen Sie, dass $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel und transient ist.

5. Hausaufgabe: (Asymmetrische Irrfahrt mit Absorption) **2 Punkte**
Betrachten Sie die asymetrische Irrfahrt mit $\mathbb{P}(S_{n+1} = i+1 | S_n = i) = p \in (0,1)$ und $\mathbb{P}(S_{n+1} = i-1 | S_n = i) = 1 - p$ auf $\{0, \dots, N\}$. Die Zustände 0 und N seien absorbierend. Für $x \in \{0, \dots, N\}$ werde die Irrfahrt in x gestartet, dass heisst $\mathbb{P}_x(S_0 = x)$. Berechnen Sie mit welcher Wahrscheinlichkeit die in Irrfahrt in N absorbiert wird.

Hinweis: Spalten Sie die Absorptionswahrscheinlichkeit nach dem ersten Schritt der Markovkette auf und leiten Sie dadurch ein Gleichungssystem her.