**Technische Universität Berlin** **WS 2009/10**
**Fakultät II – Institut für Mathematik**
Dozent: Prof. Dr. Wolfgang König
Assistent: Matthias Steinrücken
Ausgabe: Do 29.10.2009
Abgabe: Do 5.11.2009

# 3. Übungsblatt „Stochastische Modelle“
## Stoppzeit, diskretes Dirichletproblem, starke Markoveigenschaft

### Hausaufgaben

**1. Hausaufgabe:** (Exkursionen) **4 Punkte**
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum $I$. Die Startverteilung sei gegeben durch $\delta_i$, wobei $i$ ein positiv rekurrenter Zustand sei. Die zufälligen Zeiten $T_i^{(k)}$ der $k$-ten Rückkehr seien wie im Skript (Seite 20) definiert. Ferner definieren wir $Y_n^{(i,k)} := X_{T_i^{(k-1)}+n}$ und die $k$-te Exkursion von $i$ als

$$E_i^{(k)} := (Y_n^{(i,k)})_{0\le n\le (T_i^{(k)}-T_i^{(k-1)})}.$$

Zeigen Sie:

(i) $T_i^{(1)}, T_i^{(2)}, \dots$ ist eine Folge von Stoppzeiten.

(ii) $T_i^{(1)}, T_i^{(2)}-T_i^{(1)}, T_i^{(3)}-T_i^{(2)}, \dots$ ist eine Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen.

(iii) $E_i^{(1)}, E_i^{(2)}, E_i^{(3)}, \dots$ ist eine Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen.

**2. Hausaufgabe:** **4 Punkte**
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum $I$ und Übergangsmatrix $P$. Sei $D \subset I$ eine nicht-leere Teilmenge von $I$, so dass die Stoppzeit

$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in I\backslash D\}$$

$\mathbb{P}_i$ fast sicher endlich ist für jedes $i \in I$. Mit einer beschränkten Funktion $g\colon I\backslash D \to \mathbb{R}$ definieren wir $u(i) := \mathbb{E}_i(g(X_\tau))$ für $i \in I$. Zeigen Sie für alle $i \in I$:

$$u(i) = \begin{cases} g(i), & \text{falls } i \in I\backslash D, \\ \sum_{j\in D} p_{i,j}u(j) + \sum_{j\in I\backslash D} p_{i,j}g(j), & \text{falls } i \in D. \end{cases}$$

**3. Hausaufgabe:** **4 Punkte**
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum $I$ und Übergangsmatrix $P$. Ferner sei die Markovkette irreduzibel und rekurrent. Zeigen Sie: Ist $h \to [0,\infty)$ eine Funktion mit $Ph = h$, so ist $h$ konstant.

**4. Hausaufgabe:** (Nagasawas Formel) **4 Punkte**
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum $I \cup \{\partial\}$ und Übergangsmatrix $P$. Der Zustand $\partial$ sei absorbierend, und für alle $i \in I$ gelte $i \rightsquigarrow \partial$. Ferner gelte $G_i(j) := \mathbb{E}_i(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbf{1}_{\{X_n=j\}}) < \infty$ für alle $i, j \in I$. Wir definieren die Stoppzeit Zeit $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \colon X_n = \partial\}$ und setzen außerdem

$\mathbb{E}_i(\tau) < \infty$ für alle $i \in I$ voraus. Zeigen Sie, dass $(R_k)_{0 \leq k \leq \tau - 1}$ definiert durch $R_k := X_{\tau-1-k}$ eine Markovkette ist deren Übergangsmatrix $Q = (q_{i,j})_{i,j \in I \cup \{\partial\}}$ durch

$$q_{i,j} = p_{j,i} \frac{G_l(j)}{G_l(i)}, \quad \text{für alle } i, j \in I,$$

gegeben ist, wobei $X$ im Zustand $l \in I$ gestartet werde und $q_{i,\partial} := \delta_{l,i} + \delta_{\partial,i}$ für alle $i \in I \cup \{\partial\}$ definiert werde. Wie sieht die Startverteilung von $R$ aus?