Technische Universität Berlin **WS 2009/10**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Wolfgang König
Assistent: Matthias Steinrücken
Ausgabe: Do 5.11.2009
Abgabe: Do 12.11.2009

4. Übungsblatt „Stochastische Modelle“
Invariante Verteilung

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum I und Übergangsmatrix P. Sei ferner $h\colon I \to T$ eine surjektive Abbildung mit der Eigenschaft, dass

$$h(i) = h(j) \Rightarrow \sum_{k\in h^{-1}(\{x\})} p_{ik} = \sum_{k\in h^{-1}(\{x\})} p_{jk} \text{ für alle } x \in T.$$

Seien die Einträge der Matrix $Q = (q_{xy})_{x,y\in T}$ folgendermaßen definiert:

$$q_{xy} = \sum_{j\in h^{-1}(\{y\})} p_{ij} \text{ für irgendein } i \text{ mit } h(i) = x.$$

(i) Zeigen Sie, dass Q eine stochastische Matrix ist und dass der Prozess $Y = \big(Y_n := h(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix Q ist.

(ii) Zeigen Sie, dass, falls π ein invariantes Maß für X ist, $\pi \circ h^{-1}$ ein invariantes Maß für Y ist.

2. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Betrachten Sie die Markovkette mit Zustandsraum $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(m, m+1) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{m+2}\Big) \quad \text{für } m \geq 0,$$
$$p(m, m-1) = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{m+2}\Big) \quad \text{für } m \geq 1,$$

und $p(0,0) = 1 - p(0,1) = \frac{3}{4}$. Bestimmen Sie die invariante Verteilung. Ist die Markovkette reversibel?

3. Hausaufgabe: **2 Punkte**
Es sei eine Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit (höchstens abzählbarem) Zustandsraum I, Übergangsmatrix $P = (p_{i,j})_{i,j\in I}$ und invarianter Verteilung π gegeben, in welcher sie auch gestartet werde. Wir nehmen an, dass $\pi_j > 0$ für alle $j \in I$. Die Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ werde in der invarianten Verteilung gestartet. Zeigen Sie, dass $(X_N, X_{N-1}, \ldots, X_0)$ für jedes $N \in \mathbb{N}$ ebenfalls eine Markovkette ist. Bestimmen Sie deren Startverteilung und Übergangsmatrix.

4. Hausaufgabe: (Glauber-Dynamik und Gibbs-Verteilung) **6 Punkte**
Wir betrachten den Zustandsraum $I = \Sigma^N$, wobei $N \in \mathbb{N}$ und Σ eine endliche, nicht-leere Menge seien. Es seien ein „Temperaturparameter“ $\beta > 0$ und eine „Energiefunktion“ $U\colon I \to \mathbb{R}$ gegeben. Wir betrachten die Markokette auf I, deren Übergangswahrscheinlichkeiten durch folgenden Mechanismus beschrieben werden: Wenn die Kette sich im Zustand $\sigma \in I$ befindet, dann

wird ein Index $i \in \{1, \ldots, N\}$ zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgesucht, und mit einer Wahrscheinlichkeit proportional zu $\exp\{-\frac{\beta}{2}[U(\sigma_i^\alpha) - U(\sigma)]\}$ springt die Kette in den Zustand $\sigma_i^\alpha = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \alpha, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_N)$, wobei $\alpha \in \Sigma \backslash \{\sigma_i\}$ ist. Mit einer gegebenen Restwahrscheinlichkeit verharrt die Kette in ihrem Zustand σ, und alle anderen Sprungentscheidungen haben die Wahrscheinlichkeit Null. Die Übergangsmatrix P ist gegeben als

$$p_{\sigma,\sigma'} = \frac{1}{N} \begin{cases} \frac{1}{T_i(\sigma)} e^{-\frac{\beta}{2}[U(\sigma') - U(\sigma)]} & \text{falls } \sigma' = \sigma_i^\alpha \text{ für ein } i \text{ und ein } \alpha \neq \sigma_i', \\ N - \sum_{j=1}^N \frac{1}{T_j(\sigma)} \sum_{\alpha \in \Sigma \backslash \{\sigma_j\}} e^{-\frac{\beta}{2}[U(\sigma_j^\alpha) - U(\sigma)]} & \text{falls } \sigma' = \sigma, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $T_j(\sigma) = \sum_{\alpha,\kappa \in \Sigma, \alpha \neq \kappa} e^{-\beta[U(\sigma_j^\alpha) - U(\sigma_j^\kappa)]}$ gesetzt wurde.

(i) Zeigen Sie, dass die Markovkette irreduzibel und aperiodisch ist. Warum gilt $p_{\sigma,\sigma} > 0$?

(ii) Zeigen Sie, dass die Verteilung μ_β, gegeben als

$$\mu_\beta(\sigma) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta U(\sigma)} \quad \text{mit} \quad Z_\beta = \sum_{\sigma \in I} e^{-\beta U(\sigma)},$$

reversibel für die Markovkette ist.

(iii) Bestimmen Sie den Grenzwert von μ_β für $\beta \to \infty$.