Technische Universität Berlin **WS 2009/10**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Wolfgang König
Assistent: Matthias Steinrücken
Ausgabe: Do 12.11.2009
Abgabe: Do 19.11.2009

5. Übungsblatt „Stochastische Modelle“
Invariante Verteilung

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Gegeben sei die folgende stochastische Matrix auf $I = \{1, \dots, 5\}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die erwartete Rückkehrzeit der zugehörigen Markovkette in jedem Punkt aus I.

2. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine positiv rekurrente Markovkette auf $\mathbb{N}$ mit Übergangsmatrix $P = (p_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ und invarianter Verteilung $\mu = (\mu(i))_{i\in\mathbb{N}}$. Ferner sei $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\tau_n = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k > n\}$ der Zeitpunkt, an dem der Prozess $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ den Punkt n überschreitet. Sie dürfen benutzen, dass der Prozess $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $Y_n = (X_{\tau_n}, S_{\tau_n} - n)$ eine irreduzible und aperiodische Markovkette auf $I = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : j \le i\}$ ist, und dass ihre Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben sind durch

$$q_{(i_1,j_1),(i_2,j_2)} = \begin{cases} p_{i_1,i_2}\delta_{i_2,j_2} & \text{falls } j_1 = 1, \\ \delta_{i_1,i_2}\delta_{j_1,j_2+1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Geben Sie ein handliches äquivalentes Kriterium für die Existenz einer invarianten Verteilung ν der Kette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an, und ermitteln Sie diese in dem gebenen Fall.

(ii) Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit $u_n = \mathbb{P}(\text{es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } S_k = n)$ in dem Fall, dass ν existiert. Geben Sie eine intuitive Vermutung, wogegen u_n für $n \to \infty$ konvergieren sollte, und ermitteln Sie den Grenzwert anschließend mit Hilfe der positiven Rekurrenz der Kette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Hinweise: In (i) stelle man ein Gleichungssystem auf und löse es sukzessive. In (ii) drücke man das betrachtete Ereignis mit Hilfe von Y_n aus.

3. Hausaufgabe: (Kartenmischen) **4 Punkte**
Ein Stapel mit N Karten soll nach dem folgenden Verfahren gemischt werden: Die jeweils oberste Karte wird abgehoben und an eine uniform gewählte Stelle in den Stapel geschoben. Modellieren Sie das Mischen der Karten als eine Markovkette durch Angabe des Zustandsraumes und der Übergangsmatrix. Zeigen Sie, dass diese Markovkette irreduzibel und aperiodisch ist und bestimmen Sie die invariante Verteilung.

4. Hausaufgabe: **3 Punkte**
Es sei $N \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ fest, und es sei eine Urne gegeben, die höchstens N Kugeln fasst. Wir betrachten

Kugeln in der Urne in den Farben weiß und schwarz; von jeder dieser Farben liege immer mindestens eine Kugel in der Urne. Falls weniger als N Kugeln in der Urne liegen, so wird zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der Kugeln gezogen und zusammen mit einer neuen Kugel der selben Farbe in die Urne zurück gelegt. Falls die Urne N Kugeln hat, so wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nichts getan, und ansonsten werden alle Kugeln bis auf je eine weiße und eine schwarze aus der Urne entfernt. Seien W_n beziehungsweise S_n die Anzahl der weißen und schwarzen Kugeln in der Urne nach der n-ten Durchführung dieses Verfahrens. Es ist leicht zu sehen, dass (W_n, S_n) eine Markovkette auf $I = \{1, \ldots, N-1\}^2$ ist. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix dieser Markovkette, klären Sie, ob sie eine invariante Verteilung hat, und ermitteln Sie diese Verteilung gegebenenfalls.