Technische Universität Berlin **WS 2009/10**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Wolfgang König Ausgabe: Do 19.11.2009
Assistent: Matthias Steinrücken Abgabe: Do 26.11.2009

6. Übungsblatt „Stochastische Modelle“

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: (Totalvariation) **4 Punkte**
Seien μ_1 und μ_2 Verteilungen auf einem endlichen Zustandsraum I. Durch die Totalvariation

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{\mathsf{TV}} := \sup_{A \subset I} |\mu_1(A) - \mu_2(A)|$$

sei eine Metrik auf der Menge der Verteilungen gegeben. Für eine stochastische Matrix R sei der *Dobruschin'sche Kontraktionskoeffizient*

$$c(R) := \sup_{i,j \in I} \|R(i,\cdot) - R(j,\cdot)\|_{\mathsf{TV}}$$

definiert. Zeigen Sie, dass

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{\mathsf{TV}} = \frac{1}{2} \sum_{i \in I} |\mu_1(i) - \mu_2(i)| \in [0,1]$$

und

$$1 - c(R) = \min_{i,j \in I} \sum_{k \in I} \big(R(i,k) \wedge R(j,k)\big)$$

gelten.

2. Hausaufgabe: **3 Punkte**
Sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum I und Übergangsmatrix P mit der Eigenschaft, dass die transponierte Matrix P^{T} auch stochastisch ist (solche Übergangsmatrizen heißen doppelt-stochastisch). Zeigen Sie Folgendes:

(i) Falls I ein endlicher Raum ist, so sind alle Zustände positiv rekurrent. Falls zusätzlich P irreduzibel und aperiodisch ist, dann folgt, dass

$$\lim_{n \to \infty} p_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{|I|} \text{ für alle } i,j \in I.$$

(ii) Falls I abzählbar unendlich ist und P irreduzibel ist, dann sind alle Zustände entweder nullrekurrent oder transient.

3. Hausaufgabe: (Übergangsfunktion) **3 Punkte**
Betrachten Sie die Markovkette auf dem Zustandsraum $I = \{1,2\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und stationärer Verteilung $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Betrachten Sie ferner den Propp-Wilson-Algorithmus für diese Markovkette mit $T_k := 2^{k-1}$ und den möglichen Übergangsfunktionen ϕ_1 und ϕ_2 gegeben durch

$$\phi_1(i, u) := \begin{cases} 1, & \text{falls } u \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2, & \text{falls } u \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

sowie

$$\phi_2(1, u) := \begin{cases} 1, & \text{falls } u \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2, & \text{falls } u \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \phi_2(2, u) := \begin{cases} 2, & \text{falls } u \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1, & \text{falls } u \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Wahl von ϕ_1 dazu führt, dass die zum Zeitpunkt $-T_1$ gestarteten Ketten mit Wahrscheinlichkeit Eins zum Zeitpunkt 0 verschmelzen, aber die Wahl von ϕ_2 impliziert, dass die Ketten sich mit Wahrscheinlichkeit Eins gegenseitig nie treffen.

4. Hausaufgabe: (Mit Schirm, Charme und Melone) **4 Punkte**

Der Mathematiker M besitzt $r \in \mathbb{N}$ Regenschirme. M begibt sich lediglich morgens, wenn er seine Wohnung verlässt, um in sein Büro zu gehen, und abends, wenn er sein Büro verlässt, um heim zu gehen, ins Freie. Regnet es gerade, wenn er losgehen will (es regnet jeweils unabhängig mit konstanter Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$), und es ist ein Schirm zu Hand, so nimmt er einen Schirm mit auf den Weg; in allen anderen Fällen nimmt er keinen Schirm mit. M's Verhalten kann durch eine Markovkette modelliert werden, deren mögliche Zustände $0, 1, \dots, r$ die Anzahl der M beim Aufbruch zur Verfügung stehenden Schirme sind.

(i) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix P dieser Kette und zeigen Sie, dass diese irreduzibel ist.

(ii) Berechnen Sie die invariante Verteilung von P.

(iii) M hatte zu Beginn (nach dem Kauf der Schirme) alle r Schirme zu Hause, das heißt, die Kette startet in r. Wie groß ist dann auf lange Sicht die Wahrscheinlichkeit w, dass er bei Regen ohne Schirm losgehen muss?

(iv) Zeigen Sie, dass schon $r \geq 5$ Schirme genügen, damit $w \leq \frac{1}{20}$ ist.

5. Hausaufgabe: (Verwerfungsmethode) **2 Punkte**

Es sei Q eine beliebige Verteilung, und es sei B ein Ereignis mit $Q(B) > 0$. Wie generiert man eine Zufallsgröße Z, deren Verteilung die bedingte Verteilung $Q(\cdot|B)$ ist? Hierzu seien unabhängige Zufallsgrößen $Z_1, Z_2, \dots$ gegeben, die alle die Verteilung Q haben, also $P(Z_i \in A) = Q(A)$ für alle Ereignise A. Man betrachtet den Index

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : Z_n \in B\}$$

der ersten dieser Variablen, die in B liegt. Zeigen Sie, dass Z_τ die gewünschte bedingte Verteilung besitzt.