Technische Universität Berlin **WS 2009/10**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Wolfgang König Ausgabe: Do 26.11.2009
Assistent: Matthias Steinrücken Abgabe: Do 3.12.2009

7. Übungsblatt „Stochastische Modelle“
Konvergenz und Verwerfungsalgorithmus

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: (Spektralzerlegung reversibler Markovketten I) **4 Punkte**
Durch die Übergangsmatrix $P = (p_{i,j})_{i,j\in I}$ sei eine Markovkette auf dem endlichen Zustandsraum $I := \{1, \dots, N\}$ gegeben. Diese sei ferner irreduzibel und aperiodisch (das heißt es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $p_{i,j}^{(k)} > 0$ für allle $i, j \in I$ gilt). Zeigen Sie:

(i) $\lambda = 1$ ist der einzige Eigenwert von P mit Betrag 1.

(ii) Die geometrische Vielfachheit von $\lambda = 1$ ist Eins. Der zugehörige Eigenraum wird durch $(1, \dots, 1)^{\mathrm{T}}$ aufgespannt.

Hinweise: Zeigen Sie das Ergebnis zunächst für P^k, indem Sie die strikte Konvexität des Einheitskreises in $\mathbb{C}$ benutzen.

2. Hausaufgabe: (Spektralzerlegung reversibler Markovketten II) **4 Punkte**
Sie die Übergangsmatrix $P = (p_{i,j})_{i,j\in I}$ aus Aufgabe 1 zusätzlich reversibel bezüglich der invarianten Verteilung $\pi = (\pi_i)_{i\in I}$. Durch $D := (\sqrt{\pi_i}\delta_{i,j})_{i,j\in I}$ sei außerdem eine Diagonalmatrix definiert. Wenn $A := DPD^{-1}$ symmetrisch ist, dann existiert eine Orthogonalmatrix $S = (s_{i,j})_{i,j\in I}$ mit $S^{\mathrm{T}}S = SS^{\mathrm{T}} = \mathbf{1}$ und $B = SAS^{-1}$, so dass

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix},$$

wobei λ_i die der Größe des Realteils nach geordneten Eigenwerte von P sind (aus der Übung und Aufgabe 1 wissen wir, dass $1 = \lambda_1$ und $|\lambda_2|, \dots, |\lambda_N| < 1$ gelten). Die Zeilenvektoren der Matrix S seien mit $e_1^{\mathrm{T}}, \dots, e_N^{\mathrm{T}}$ bezeichnet.

(i) Zeigen Sie, dass $A := DPD^{-1}$ symmetrisch ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Beziehung $A^k = \sum_{i=1}^N \lambda_i^k e_i e_i^{\mathrm{T}}$ gilt, und benutzen Sie diese, um die Form

$$p_{i,j}^{(k)} = \pi_j + \sqrt{\frac{\pi_j}{\pi_i}} \sum_{l=2}^N \lambda_l^k s_{l,i} s_{l,j}$$

für die k-schrittigen Übergangswahrscheinlichkeiten herzuleiten.

Hinweise: Benutzen Sie die Repräsentation eines beliebigen Vektors x in der Basis $\{e_i\}_{i\in I}$, um $A^k x$ entsprechend umzuformen. Zeigen Sie ferner, dass die e_i^{T} Linkseigenvektoren von A sind. Leiten Sie daraus die Beziehung $e_1^{\mathrm{T}} = c\pi^{\mathrm{T}} D$ her und zeigen Sie, dass $c = 1$ gewählt werden kann.

3. Hausaufgabe: (Konvergenzabschätzung) **4 Punkte**

Betrachten Sie erneut die aperiodische, irreduzible und reversible Übergangsmatrix $P = (p_{i,j})_{i,j\in I}$ aus den Aufgaben 1 und 2. Es seien ferner $\lambda^* := \max\{|\lambda| \colon\ \lambda \neq 1 \text{ Eigenwert von } P\}$ und

$$\delta(k) := \max_{i,j\in I} \left\{ \frac{|p_{i,j}^{(k)} - \pi_j|}{\pi_j} \right\}$$

definiert.

(i) Zeigen Sie, dass $\delta(k) \leq (\lambda^*)^k / \min_{i\in I}\{\pi_i\}$ für alle k gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\delta(k) \geq (\lambda^*)^k$ für alle geraden k gilt.

Hinweise: Die Ungleichung in (i) folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, und bei (ii) ist es hilfreich zu zeigen, dass $1 = \sum_{j=1}^N \pi_j = \sum_{j=1}^N s_{2,j}^2$ gilt. Die Ergebnisse aus Aufgabe 2 könnten hilfreich sein.

4. Hausaufgabe: (Verwerfungsmethode) **4 Punkte**

Seien π und ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer endlichen Menge I, und sei $c > 1$, so dass $\pi(i) \leq c\nu(i)$ für jedes $i \in I$. Wir betrachten den folgenden Algorithmus:

(a) Ziehe einen nach ν verteilten Wert $X \in I$.

(b) Gegeben $X = i$, akzeptiere diesen Wert mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\pi(i)}{c\nu(i)}$ und terminiere; andernfalls verwerfe ihn und gehe zurück zu Schritt (a).

Beweisen Sie, dass dieser Algorithmus in endlicher Zeit terminiert und eine nach π verteilte Stichprobe generiert.