# 8. Übungsblatt „Stochastische Modelle“
## MKSZ

### Hausaufgaben

**1. Hausaufgabe:** (Poissonprozess) **4 Punkte**
Betrachten Sie die alternative Definition des Poissonprozesses mit Parameter $\alpha$: Es seien zufällige Punkte $0 < T_1 < T_2 < \dots$ auf der positiven Achse gegeben, so dass für $0 \leq a < b$ die Zahl jener dieser Punkte, die im Intervall $(a, b]$ liegen, durch $N_{(a,b]}$ gegeben ist. Ferner sind für $I \in \mathbb{N}$ und $0 \leq a_1 < b_1 < \dots < a_I < b_I$ die Zufallsgrößen $N_{(a_1,b_1]}, \dots, N_{(a_I,b_I]}$ unabhängig poissonverteilt mit dem jeweiligen Parameter $\alpha(b_i - a_i)$, $1 \leq i \leq I$. Wir betrachten die Abstände $\tau_k = T_k - T_{k-1}$ (wobei $k \in \mathbb{N}$ und $T_0 = 0$) zwischen aufeinanderfolgenden dieser zufälligen Punkte. Zeigen Sie, dass $\tau_2$ und $\tau_1$ unabhängige, zum Parameter $\alpha$ exponentialverteilte Zufallsgrößen sind.

**Hinweis:** Zeigen Sie zunächst, dass die Abbildung $(t_1, t_2) \mapsto \alpha^2 e^{-\alpha t_2} \mathbf{1}_{\{0 \leq t_1 < t_2\}}$ eine Dichte des Zufallsvektors $(T_1, T_2)$ ist.

**2. Hausaufgabe:** (Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung) **3 Punkte**
Zeigen Sie, dass eine zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable $X$ gedächtnislos ist, d.h. dass für $x, y \geq 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(X > y + x | X > x) = \mathbb{P}(X > y).$$

Zeigen Sie umgekehrt. Falls die gedächtnislose Zufallsvariable $X$ eine auf dem Intervall $[0, \infty)$ stetige Dichte besitzt, dann ist sie exponentialverteilt.

**3. Hausaufgabe:** (Geburts- und Todesprozess) **5 Punkte**
Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ eine Geburts- und Todeskette in stetiger Zeit mit Zustandsraum $\{0, 1, 2, \dots\}$ und infinitesimalen Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = n + m | X_t = n) = \begin{cases} \lambda_n \cdot h + o(h) & \text{wenn } m = 1, \\ \mu_n \cdot h + o(h) & \text{wenn } m = -1, \\ o(h) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei gilt $\lambda_n, \mu_n \geq 0$ für alle $n$ und $\mu_0 = 0$. Betrachten Sie $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die in $(X_t)_{t \geq 0}$ eingebettete MKDZ. Unter welchen Bedingungen an die Geburtsraten $\lambda_n$ und an die Todesraten $\mu_n$ besitzt $Y$ eine invariante Verteilung? Bestimmen Sie diese!

**4. Hausaufgabe:** (Verzweigungsprozess) **4 Punkte**
Bei der Vermehrung von Bakterien durch Zellteilung nimmt man an, dass sich ein Bakterium in einem Zeitintervall der Länge $\Delta t$ mit der Wahrscheinlichkeit $a\Delta t + o(\Delta t)$ in zwei Bakterien teilt unabhängig von der Anzahl der vorangegangenen Teilungen und unabhängig von der Zahl der Bakterien in der Kultur. ($a > 0$ ist dabei ein reeller Parameter). Es bezeichne $B_t$ die Anzahl der Bakterien zur Zeit $t$ und $p_n(t) = \mathbb{P}(B_t = n)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kultur zum Zeitpunkt $t$ aus genau $n \in \mathbb{N}$ Bakterien besteht. Zur Zeit $t = 0$ seien $k \in \mathbb{N}$ Bakterien vorhanden.

(i) Leiten Sie ein System von Differentialgleichungen für $p_1, p_2, \ldots$ her, und zeigen Sie, dass für alle $t \geq 0$ gilt:

$$p_n(t) = \mathbf{1}_{\{n \geq k\}} \binom{n-1}{n-k} (e^{at} - 1)^{n-k} e^{-nat}.$$

(ii) Berechnen Sie die erwartete Anzahl der Bakterien $M_t = \mathbb{E}(B_t)$ zur Zeit $t \geq 0$, und finden Sie ein deterministisches Modell für die Bakterienvermehrung, welches $M_t$ zur Lösung hat.