Technische Universität Berlin **WS 2009/10**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Wolfgang König Ausgabe: Do 10.12.2009
Assistent: Matthias Steinrücken Abgabe: Do 17.12.2009

9. Übungsblatt „Stochastische Modelle“
MKSZ

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: (MKSZ und Poissonprozesse) **4 Punkte**
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Markovkette in stetiger Zeit mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3\}$ und Q-Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Markovkette in diskreter Zeit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einen unabhängigen Poissonprozess $(N_t)_{t\geq 0}$ an, so dass $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_{N_t})_{t\geq 0}$ die gleiche Verteilung haben.

2. Hausaufgabe: (Halbgruppe und Q-Matrix) **4 Punkte**
Entscheiden Sie, ob es eine Markovkette in stetiger Zeit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ und Zustandsraum $E = \{1, 2\}$ gibt, die

$$\mathbb{P}_1 [X_t = 2] = \mathbb{P}_2 [X_t = 1] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp(-2t) \qquad \text{für alle } t \geq 0 \tag{1}$$

erfüllt. Falls eine solche existiert, berechnen Sie die Q-Matrix und beschreiben Sie mit eigenen Worten, wie sich X entwickelt.
Führen Sie dieselben Untersuchungen durch mit der Bedingung

$$\mathbb{P}_1 [X_t = 2] = \mathbb{P}_2 [X_t = 2] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp(-2t) \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

anstelle von Bedingung (1).

3. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Exp(λ)-verteilte Zufallsvariablen und $Z_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiert. Berechnen Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion von Z_n.

4. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Wir betrachten eine Maschine, bei der im Zeitintervall $[t, t + h]$ mit Wahrscheinlichkeit $\lambda h + o(h)$ ein Fehler auftritt, wenn sie zum Zeitpunkt $t \geq 0$ fehlerfrei lief. Ist sie zum Zeitpunkt $t \geq 0$ nicht funtionsfähig, so wird sie im Zeitintervall $[t, t + h]$ mit Wahrscheinlichkeit $\mu h + o(h)$ repariert.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine zum Zeitpunkt $t \geq 0$ arbeitet unter der Annahme, dass sie zum Zeitpunkt 0 ebenfalls funktionsfähig war.

Hinweis: Sie dürfen die sogenannte *Rückwärtsgleichung*

$$P'(t) = QP(t)$$

benutzen, wobei $(P(t))_{t\geq 0}$ eine Markov'sche Halbgruppe und Q die zugehörige Q-Matrix ist.