

Lineare Algebra II

9. Hausaufgabe

Abgabe: 12.01.2011 vor der Vorlesung

1. Aufgabe

(8 Punkte)

Sei V ein K -Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V, V)$.

- (i) Zeigen Sie für $j \in \mathbb{N}_0$, dass $\text{Kern}(f^j) \subseteq \text{Kern}(f^{j+1})$ gilt und dass ein $m \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $\text{Kern}(f^m) = \text{Kern}(f^{m+1})$. Zeigen Sie weiter, dass dann $\text{Kern}(f^m) = \text{Kern}(f^{m+j})$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt.
- (ii) Zeigen Sie für $j \in \mathbb{N}_0$, dass $\text{Bild}(f^j) \supseteq \text{Bild}(f^{j+1})$ gilt und dass ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $\text{Bild}(f^\ell) = \text{Bild}(f^{\ell+1})$. Zeigen Sie weiter, dass dann $\text{Bild}(f^\ell) = \text{Bild}(f^{\ell+j})$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt.
- (iii) Seien nun $m, \ell \in \mathbb{N}_0$ minimal mit $\text{Kern}(f^m) = \text{Kern}(f^{m+1})$ und $\text{Bild}(f^\ell) = \text{Bild}(f^{\ell+1})$. Zeigen Sie, dass $m = \ell$ gilt.
- (iv) Sei $m \in \mathbb{N}_0$ wie in (iii). Zeigen Sie, dass $\text{Kern}(f^m)$ und $\text{Bild}(f^m)$ beide f -invariant sind und dass $V = \text{Kern}(f^m) \oplus \text{Bild}(f^m)$ gilt.

2. Aufgabe

(4 Punkte)

Sei V ein K -Vektorraum mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (i) Es existiert eine Basis B von V so, dass $[f]_{B,B}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
- (ii) Es existiert eine endliche Folge V_0, V_1, \dots, V_n von Unterräumen von V mit
 - * $V_j \subsetneq V_{j+1}$ für $j = 0, 1, \dots, n-1$,
 - * $\dim_K(V_j) = j$ für $j = 0, 1, \dots, n$,
 - * V_j ist f -invariant für $j = 0, 1, \dots, n$.

3. Aufgabe

(5 Punkte)

Sei V ein K -Vektorraum mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Es gelte $V = U_1 \oplus U_2$ mit f -invarianten Unterräumen U_1, U_2 von V . Definiere $f_j := f|_{U_j} \in \mathcal{L}(U_j, U_j)$, $j = 1, 2$. Für $v \in V$ existieren eindeutige $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$, so dass $f(v) = f(u_1) + f(u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$ folgt. Wir schreiben hierfür $f = f_1 \oplus f_2$ und sagen, f ist die *direkte Summe von f_1 und f_2* (bzgl. der Zerlegung $V = U_1 \oplus U_2$). Zeigen Sie:

- (i) $\text{Rang}(f) = \text{Rang}(f_1) + \text{Rang}(f_2)$.
- (ii) $P_f = P_{f_1} \cdot P_{f_2}$.
- (iii) Für alle $\lambda \in K$ gilt $a(\lambda, f) = a(\lambda, f_1) + a(\lambda, f_2)$.
(Dabei definieren wir $a(\lambda, h) := 0$, wenn λ kein Eigenwert von $h \in \mathcal{L}(V, V)$ ist.)
- (iv) Für alle $\lambda \in K$ gilt $g(\lambda, f) = g(\lambda, f_1) + g(\lambda, f_2)$.
(Dabei ist $g(\lambda, h) := \dim(\text{Kern}(\lambda \text{id} - h))$ für $h \in \mathcal{L}(V, V)$.)
- (v) Für alle $p \in K[t]$ gilt $p(f) = p(f_1) \oplus p(f_2)$.

4. Aufgabe

(3 Punkte)

Ist V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und $f \in \mathcal{L}(V, V)$ eine Projektion, d.h. es gilt $f^2 = f$, so sind äquivalent:

- * f ist selbstadjungiert,
- * $\text{Kern}(f) \perp \text{Bild}(f)$, d.h. für alle $x \in \text{Kern}(f), y \in \text{Bild}(f)$ gilt $\langle x, y \rangle = 0$.

Aufgrund dieser Charakterisierung werden selbstadjungierte Projektionen auch *Orthogonalprojektionen* genannt.

Gesamtpunktzahl: 20