Es war alles soweit richtig, sogar der letzte Schritt, fangen wir dort nochmal an: Für $|t|$ hinreichend klein ist also

$$\int_0^t S(\tau)d\tau \in L(X)$$

stetig invertierbar. Daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{S(h)-\mathrm{id}}{h}\int_0^t S(\tau)d\tau &= \frac{1}{h}\left(\int_0^t S(h)S(\tau)d\tau - \int_0^t S(\tau)d\tau\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_0^t S(\tau+h)d\tau - \int_0^t S(\tau)d\tau\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} S(\tau)d\tau - \int_0^t S(\tau)d\tau\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)d\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Nach den entsprechenden Konvergenzaussagen aus dem Abschnitt "'Integral für stetige Funktionen mit Werten in einem Banach-Raum"' konvergiert in $L(X)$:

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)d\tau \to S(t) \in L(X)$$

und

$$\frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)d\tau \to S(0) = \mathrm{id} \in L(X)$$

für $h \to 0$. Zusammengenommen erhalten wir also

$$\frac{S(h)-\mathrm{id}}{h} \to \big(S(t)-\mathrm{id}\big)\left(\int_0^t S(\tau)d\tau\right)^{-1} =: -A \in L(X).$$