TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Hans-Christian Kreusler

Wintersemester 2011/2012

Differentialgleichungen I

1.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 3. / 4. November

Aufg 1: **5 Punkte**

Bestimme jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen und löse anschließend das entsprechende Anfangswertproblem.

(i) $u' = tu^{-1}(1 + u^2), \qquad u(0) = 1;$

(ii) $u' + 2u = \sin(t), \qquad u(0) = 0.$

(iii) $u'' - 2u' + 5u = \exp(t), \qquad u(0) = 1,\, u'(0) = 2.$

Aufg 2: **3 Punkte**

Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = y/x + \ln(x), \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

und gib das maximale Existenzintervall der Lösung an.

Aufg 3: **3 Punkte**

Eine Differentialgleichung vom Typ $y' = f(y/x)$ kann durch Einführung einer neuen Variablen $u = y/x$ in eine Differentialgleichung vom Typ $u' = (f(u) - u)/x$ überführt werden.

Löse mit dieser Methode das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = (9x^2 + 3y^2)/2xy, \\ y(2) = 2. \end{cases}$$

Aufg 4: **3 Punkte**

Eine Bernoulli-Differentialgleichung ist von der Form

$$u'(t) + p(t)u(t) = r(t)u(t)^n, \qquad t > 0,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Für $n \geq 2$ ist diese DGL nichtlinear, läßt sich jedoch mittels der Substitution

$$v(t) = u(t)^k$$

für ein geeignetes k in eine lineare Differentialgleichung umformen. Führe diese Umformung durch und bestimme so k in Abhängigkeit von n.

Löse weiterhin mit dieser Methode die Bernoulli-Gleichung

$$u' + \frac{u}{t} = t^2 u^2.$$

Aufg 5: **3 Punkte**

Sei j eine reelle Zahl. Zeige, daß $j \leq 4/9$ eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Randwertproblems [1]

$$\begin{cases} \phi''(x) = \frac{j}{\sqrt{\phi(x)}} & \text{für } x \in (0,1) \\ \phi(0) = 0 \\ \phi(1) = 1 \end{cases}$$

ist.

(Hinweis: Mit ϕ' multiplizieren und zweimal geeignet integrieren.)

[1] Dieses Randwertproblem ist eng verbunden mit dem Gesetz von CHILD-LANGMUIR, welches den Zusammenhang zwischen Stromdichte und Spannung in einer Diode beschreibt, die aus zwei unendlichen, parallelen Platten in einem Vakuum besteht. Das Gesetz finden Anwendung z.B. in der Plasmaphysik.