Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Hans-Christian Kreusler

Wintersemester 2011/2012

# Differentialgleichungen I

## 10.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 19. / 20. Januar

**Aufgabe 1:** **4 Punkte**

In der Vorlesung wurde das Lemma von Gronwall in der folgenden Form bewiesen:

> Sei $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, $t_0 \in [0,T), a, b \in L^\infty(t_0,T)$ und $\lambda \in L^1(t_0,T), \lambda(t) \geq 0$ fast überall in $(t_0,T) \ni t$. Dann folgt aus
>
> $$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t \lambda(s)a(s)ds \qquad \text{f. ü. in } (t_0,T)$$
>
> für fast alle $t \in (t_0,T)$
>
> $$a(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t e^{\Lambda(t)-\Lambda(s)}\lambda(s)b(s)ds\,,$$
>
> wobei $\Lambda(t) := \int_{t_0}^t \lambda(\tau)d\tau$.

(i) Die Voraussetzung $\lambda(t) \geq 0$ f.ü. in $(t_0,T)$ ist wesentlich. Konstruiere ein Gegenbeispiel zur Aussage des Gronwallschen Lemmas für den Fall, daß $\lambda$ nicht der Vorzeichenbedingung genügt.

(ii) Zeige eine dem Lemma von Gronwall entsprechende Aussage für den Fall, daß $t < t_0$ ist.

**Aufgabe 2:** **4 Punkte**

Wir erinnern uns an die folgende Version des Satzes von Picard-Lindelöf aus der Vorlesung:

> Sei $X$ ein Banachraum. Die Funktion $f : [0,T] \times X \to X$ sei stetig und im zweiten Argument bzgl. $t$ gleichmäßig Lipschitz-stetig, so daß es ein $L > 0$ gibt und für alle $t \in [0,T]$ und alle $v, w \in X$
>
> $$\|f(t,v) - f(t,w)\| \leq L\|v - w\|$$
>
> gilt. Dann besitzt das Anfangswertproblem
>
> $$\begin{cases} u'(t) = f(t,u(t)), & t \in [0,T], \\ u(t_0) = u_0 \in X \end{cases} \tag{1}$$
>
> auf dem gesamten Zeitintervall genau eine Lösung $u \in \mathcal{C}^1([0,T];X)$.

In dieser Aufgabe soll es um die Stabilitätseigenschaften eines solchen Problems gehen. Zeige die folgenden Behauptungen.

(i) Unter den Voraussetzungen des zitierten Satzes sei $u$ die globale Lösung von (1) zum Anfangswert $u_0 \in X$. Dann gibt es auch eine globale Lösung $v$ zum beliebigen Anfangswert $v_0 \in X$ und es gilt für alle $t \in [0,T]$

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{L|t-t_0|}\|u_0 - v_0\| \leq e^{LT}\|u_0 - v_0\|.$$

(ii) Seien für die rechten Seiten $f, g : [0,T] \times X \to X$ die Voraussetzungen des zitierten Satzes mit den Konstanten $L_f$ und $L_g$ erfüllt. Dann gibt es globale Lösungen $u$, $v$ von (1) zu derselben Anfangsbedingung $u(t_0) = v(t_0) = u_0 \in X$ und es gilt für alle $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\|u(t) - v(t)\| &\leq |t - t_0| e^{\min\{L_f, L_g\}|t-t_0|} \sup_{t\in[0,T], w\in X} \|f(t,w) - g(t,w)\| \\ &\leq T e^{\min\{L_f, L_g\}T} \sup_{t\in[0,T], w\in X} \|f(t,w) - g(t,w)\|.\end{aligned}$$

**Aufgabe 3:** **4 Punkte**

Sei $(H(\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(H)$ ein akkretiver Operator, d. h. $-A$ sei dissipativ. Zeige, daß der Operator $R_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}$ (wobei $I : H \to H$ die identische Abbildung ist) für jedes $\lambda \geq 0$ als linearer und beschränkter Operator in $H$ existiert und *nichtexpansiv* ist, d.h. für alle $u, v \in H$ gilt

$$\|R_\lambda u - R_\lambda v\| \leq \|u - v\|.$$

Hinweis: Für $\lambda \neq 0$ betrachte zur Lösung von $(I + \lambda A)u = f$ die Rekursionsvorschrift

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + (I + \lambda A)u^n = f$$

für ein beliebiges $u^0 \in H$ und $\tau > 0$ geeignet gewählt.

**Aufgabe 4:** **4 Punkte**

Lies den Artikel von Ph. Korman [1] – der dritte Abschnitt ist für uns nicht wichtig – und bearbeite die folgenden Aufgaben:

(i) Fasse **(kurz: wenige Sätze)** den Inhalt des Artikels zusammen (Worum geht es?).

(ii) Formuliere (Lemma 2.1 und das folgende Korollar) **oder** (Theorem 2.1) als eigenständige Aussagen und beweise sie.

Der Artikel ist über `http://www.emis.de/journals/PM/` frei zugänglich.

[1] Korman, P. : Remarks on Nagumo's condition. In: *Port. Math.* 55 (1998), Nr. 1, S. 1–9