

Differentialgleichungen I

11. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 26. / 27. Januar

Aufgabe 1:

4 Punkte

Für eine äquidistante Zerlegung des Zeitintervalls $[0, T]$ in N Teilintervalle der Länge $\Delta t = T/N$ betrachte man das folgende Schema:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t f(t_{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1; u^0 \text{ gegeben,}$$

mit $t_{n+\frac{1}{2}} := \frac{t_n+t_{n+1}}{2}$ und $u^{n+\frac{1}{2}} := \frac{u^n+u^{n+1}}{2}$, zur Approximation der Lösung $u(t_n) \approx u^n$ des AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Zeige die Wohldefiniiertheit des Verfahrens, A-priori-Abschätzungen für $\{u^n\}$, $\{\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}\}$ und, daß der Fehler sich wie $(\Delta t)^2$ verhält, wenn u''' existiert und geeignet integrierbar ist.

Hinweis: Für die Lösung ist u.a. zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} \frac{e^{n+1} - e^n}{\Delta t} = \rho^n := \frac{1}{2\Delta t} & \left(\int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} (t - t_n)^2 u'''(t) dt + \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^2 u'''(t) dt \right) \\ & + f(t_{n+\frac{1}{2}}, u(t_{n+\frac{1}{2}})) - f(t_{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

gilt.

Aufgabe 2:

3 Punkte

Gegeben sei eine skalare autonome Differentialgleichung

$$u' = \gamma u^n, \quad t \geq 0$$

mit $\gamma \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Untersuche, ob die Nulllösung stabil (asymptotisch / exponentiell) bzw. attraktiv ist.

Aufgabe 3:

5 Punkte

Beweise: Für eine rechte Seite f , die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt, folgt aus der exponentiellen die asymptotische Stabilität.

Im eindimensionalen Fall folgt schon aus der Attraktivität die Stabilität. Im allgemeinen gilt dies jedoch nicht.

Hinweis: Das Gegenbeispiel ist wahrscheinlich nichttrivial, hier lohnt eine Literaturrecherche.

Aufgabe 4:**5 Punkte**

Bestimme alle Gleichgewichtspunkte der folgenden Systeme und untersuche deren Stabilität.

(i)

$$\begin{aligned}u' &= 5u - u^2 - uw \\w' &= -2w + uw,\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}u' &= u(1 - w) \\w' &= w(u - 1)\end{aligned}$$

(iii) Aus der Vorlesung bekannt ist das SIR-Modell zur Beschreibung von Krankheitsausbreitungen. Bestimme die Gleichgewichtspunkte des Modells und untersuche deren Stabilität:

$$\begin{aligned}S' &= -\alpha SI \\I' &= \alpha SI - \beta I \\R' &= \beta I.\end{aligned}$$