Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Hans-Christian Kreusler

Wintersemester 2011/2012

Differentialgleichungen I

12.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 2. / 3. Februar

Aufgabe 1: **5 Punkte**

1. Löse das Randwertproblem für die Differentialgleichung
$$-u''(x) + 2u'(x) + 8u(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$
mit
   (i) homogenen Dirichlet-Randbedingungen,
   (ii) $u(0) = 0,\ u(1) = 1,$

   für die rechten Seiten
   (a) $f(x) \equiv 0,$
   (b) $f(x) = 6(1 - 4x^2)e^{4x},$

   und skizziere die Lösungen.
2. Unter welchen Bedingungen ist die Aufgabe
$$-u''(x) = 0$$
mit Robinschen Randbedingungen lösbar?

Aufgabe 2: **5 Punkte**
Wir betrachten das RWP
$$\begin{cases} -u'' - \lambda u = 0 & \text{auf } (0,1) \\ u(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$
mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Für welche λ besitzt das Problem nicht-triviale Lösungen? Ein solches λ wird *Eigenwert des RWP* genannt, eine zugehörige nicht-triviale Lösung nennt man *Eigenlösung*. Das obige RWP bezeichnet man auch als *Eigenwertproblem*. Diskutiere diese Namensgebung.

Wir betrachten nun das Eigenwertproblem zum Sturm-Liouville-Problem
$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) - \lambda u(x) = 0, & x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$
mit $p \in \mathcal{C}^1[a,b]$, $p(x) > 0$ auf $[a,b]$ und $q \in \mathcal{C}[a,b]$ reell.

(i) Zeige, daß hier alle Eigenwerte reell sind.

(ii) Es gelte $q(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Zeige, daß nun alle Eigenwerte nichtnegativ sind.

Hinweis: L^2-Skalarprodukt.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Beweise die sogenannte LAGRANGE-Identität: Sei

$$(Lu)(x) := -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x), \quad x \in (a, b),$$

$p \in \mathcal{C}^1[a, b]$, $p(x) > 0$ für $x \in (a, b)$, $q \in \mathcal{C}[a, b]$, der das STURM-LIOUVILLE-Problem beschreibende Differentialausdruck. Dann gilt für zwei Funktionen $u, v \in \mathcal{C}^2[a, b]$

$$uLv - vLu = (p(u'v - uv'))' \ .$$

Gilt außerdem $u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0$, so folgt

$$(Lu, v)_2 = (u, Lv)_2 \ ,$$

wobei $(\cdot, \cdot)_2$ das übliche $L^2(a, b)$-Skalarprodukt bezeichne.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Wir erinnern uns an die fünfte Aufgabe des ersten Aufgabenblattes.
Hier nehmen wir nun an, daß $0 < j < \frac{4}{9}$ sei. Zeige, daß dann für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ das semilineare Randwertproblem

$$\begin{cases} \phi''(x) = \frac{j}{\sqrt{\phi(x)+\varepsilon}}, \quad x \in (0, 1), \\ \phi(0) = 0, \\ \phi(1) = 1, \end{cases}$$

genau eine Lösung besitzt.
Hinweis: Zeige zunächst, daß für jedes $\lambda \geq 0$ genau eine Lösung ϕ_λ der Differentialgleichung mit $\phi_\lambda(0) = 0$ und $\phi'_\lambda(0) = \lambda$ existiert. Zeige dann, daß für festes x $\lambda \mapsto \phi'_\lambda(x)$ streng monoton wachsend ist, daß auch $\lambda \mapsto \phi_\lambda(x)$ dies ist und schließlich, daß $\lambda \mapsto \phi''_\lambda(x)$ streng monoton fällt. Zeige nun die Lipschitzstetigkeit von $\lambda \mapsto \phi_\lambda(1)$ und benutzte schließlich den Zwischenwertsatz.