Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Hans-Christian Kreusler

Wintersemester 2011/2012

Differentialgleichungen I

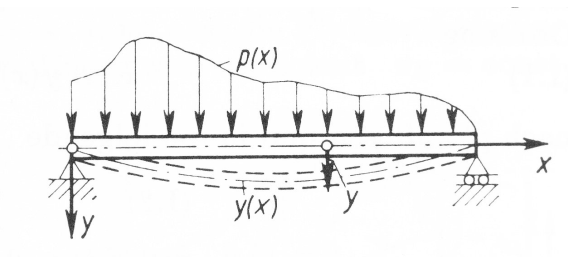
13.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 9. / 10. Februar

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Die Durchbiegung $y(x)$ eines Trägers mit konstanter Biegesteifigkeit $\alpha = 1$ unter einer Belastung mit Belastungsdichte $p(x)$ genügt der Differentialgleichung vierter Ordnung

$$y^{(4)}(x) = p(x).$$



Ist der Träger an den Punkten $x = 0$ und $x = l$ momentenfrei gelagert, so erhält man die Randbedingungen

$$y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0.$$

Zeige, daß die Greensche Funktion für diese Problem die Form

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{6\alpha l}\xi(x-l)(x^2+\xi^2-2lx), & \text{für } \xi \le x \\ \frac{1}{6\alpha l}x(\xi-l)(x^2+\xi^2-2l\xi), & \text{für } x \le \xi \end{cases}$$

hat und daß die Lösung des Problems durch

$$y(x) = \int_0^l G(x,\xi)p(\xi)d\xi$$

gegeben ist.
Bemerkung: Wirkt an Stelle der Belastung mit Dichte p nur eine Einzellast der Größe 1 an der Stelle ξ_0, so folgt

$$y(x) = G(x, \xi_0).$$

Die Greensche Funktion gibt dann also als „Einflußfunktion“ die Durchbiegung an der Stelle x an, wenn an der Stelle ξ_0 eine Last der Größe 1 wirkt.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Zeige, daß jede Lösung $u \in \mathcal{C}^1[a,b]$ der Integralgleichung

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi, \quad x \in (a,b),$$

eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x, u(x), u'(x)), & x \in (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

ist und umgekehrt, wobei $c, d \in \mathcal{C}[a,b]$ und $f \in \mathcal{C}([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ seien. Hier ist G die Greensche Funktion aus der Vorlesung. Wir setzen voraus, daß das zur homogenen Gleichung gehörende Randwertproblem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen nur die Nulllösung besitzt.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Beweise die folgende schärfere Version eines Satzes aus der Vorlesung:

> Es sei $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die einer Lipschitz-Bedingung genügt, es also ein $L > 0$ gibt, so daß für alle $x \in [a,b]$ und alle $s, t \in \mathbb{R}$
>
> $$|f(x,s) - f(x,t)| \le L|s-t|$$
>
> gilt. Ferner gelte
>
> $$L < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}\,. \tag{1}$$
>
> Dann gibt es genau eine Lösung des semilinearen Problems
>
> $$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)), & x \in (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Betrachte dazu die Menge

$$\left\{ v \in \mathcal{C}[a,b] \,:\, |||v||| := \sup_{x \in (a,b)} \frac{|v(x)|}{\sin \frac{\pi(x-a)}{b-a}} < \infty \right\}$$

und zeige, daß diese einen Banach-Raum bildet. Wende dann den Banachschen Fixpunktsatz an.

Bemerkung: Die Bedingung (1) ist scharf, die Aussage des Satzes kann also nicht mehr aufrechterhalten werden, falls $L \ge \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$ ist.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Untersuche das semilineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = -e^{u(x)}, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

auf Lösbarkeit.

Hinweis: Zeige zunächst, daß stets $u(x) \le 0$ gilt. Reduziere dann das Randwertproblem auf ein Fixpunktproblem auf der Menge

$$\mathcal{M} := \{ v \in \mathcal{C}[0,1] \,:\, v(x) \le 0 \quad \text{für } x \in [0,1] \}.$$