Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Hans-Christian Kreusler

Wintersemester 2011/2012

Differentialgleichungen I

3.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 17. / 18. November

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Ist X ein unendlichdimensionaler Banach-Raum, $u_0 \in X$ und $r > 0$, so ist die Kugel $\overline{B}(u_0, r) = \{v \in X : \|v - u_0\| \leq r\}$ nach dem Rieszschen Kompaktheitssatz nicht kompakt. Daher muß das Bild einer auf $\overline{B}(u_0, r)$ definierten stetigen Funktion nicht beschränkt sein.

Als Beispiel hierzu betrachten wir den Raum $X = l^2$ der quadratisch summierbaren Folgen $u = (u_1, u_2, \dots)$ mit

$$\|u\|_{l^2} := \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2\Big)^{1/2} < \infty$$

und die auf der Einheitskugel $\overline{B}(0,1) \subset l^2$ durch

$$f(u) := \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{1 + 3^{-k} - u_k}, 0, 0, \dots\Big)$$

definierte Abbildung f.

Zeige, daß f wohldefiniert ist, in l^2 abbildet und stetig ist und daß das Bild von $\overline{B}(0,1)$ unter f unbeschränkt ist.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Es sei f wie in Aufgabe 1 definiert. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), \\ u_1(0) = 2,\ u_2(0) = 19/9,\ u_k(0) = 3^{-k} \text{ für } k = 3, 4, \dots \end{cases}$$

auf einem geeigneten Zeitintervall I. Liegt diese Lösung in $\mathcal{C}^1(I; l^2)$?

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Es sei $X \subset \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = 0$, versehen mit der Supremumsnorm. Es sei $k \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$(Ku)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)u(y)dy, \qquad u \in X,\, x \in \mathbb{R}.$$

(i) Zeige, daß alle Funktionen $u \in X$ gleichmäßig stetig und beschränkt sind.

(ii) Zeige, daß K eine Abbildung von X in sich, linear und beschränkt ist.

(iii) Es gelte $\int_{-\infty}^{\infty} |k(y)|dy < 1$. Zeige, daß es dann zu jedem $f \in X$ genau ein $u \in X$ gibt, so daß $u - Ku = f$ gilt.[1]

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Gib mindestens drei Literaturquellen an, in denen der folgende Satz von Mazur bewiesen wird und formuliere einen Beweis in eigenen Worten. Der Satz von mazur lautet:

> *Sei X ein* Banach*-Raum und $A \subset X$ eine relativ kompakte Menge. Dann ist auch die konvexe Hülle co(A) von A relativ kompakt.*

---

[1] Wen es interessiert: Dies ist eine Hälfte der *Fredholmschen Alternative* für diesen konkreten Operator.

Wie Banach zu seinem Doktortitel kam[2]

Stefan Banach (1892-1945) wurde in Krakau (heute Kraków) geboren, verbrachte sein wissenschaftliches Leben jedoch in Lemberg (heute Lwiw in der Ukraine). Ulam, einer seiner Schüler, hat über ihn geschrieben und ihn so geschildert[3]:

> *Banach, by the way, was a very eccentric person in his habits and his personal life. He would not take any examinations at all, disliking them intensely. But he wrote so many original papers and proposed so many new ideas that he was granted a doctor's degree several years later without passing any of the regular exams.*

Schon am Anfang seiner Karriere zeigte er wenig Neigung, seine neuen Resultate auch aufzuschreiben. Als die Lemberger Professoren den Eindruck hatten, er habe genügend Material für eine Dissertation beisammen, schickten sie einen Assistenten aus, um Banach diskret nach dem Stand seiner Forschungen auszuhorchen. Dieser Assistent mußte dann die Sätze und Beweise, die Banach ihm erklärt hatte, zu Papier bringen, und nach geraumer Zeit blieb für letzteren nur noch die Aufgabe, den gesammelten Text zu redigieren; im Juni 1920 wurde die Dissertation eingereicht und zwei Jahre später erschien sie in *Fundamenta Mathematicae*. Aber es gab noch eine mündliche Prüfung, und wieder mußten die Professoren zu einem Trick greifen. Eines Tages bat einer von ihnen Banach in einen Seminarraum unter dem Vorwand, es seien gerade ein paar auswärtige Mathematiker da, die bei einem bestimmten Problem nicht weiterkämen und ob er mit ihnen vielleicht ein paar Fragen diskutieren wolle. Das tat Banach nur zu gerne, und als nach einiger Zeit alle Fragen zur Zufriedenheit der Gäste – man ahnt es bereits, es handelte sich um die Prüfungskommission – beantwortet waren, stand der Promotion nichts mehr im Wege. 1922 folgte die Habilitation; die Details der Prüfung sind leider nicht überliefert.

Der Titel des oben zitierten Buches von Mauldin spielt auf folgende Begebenheit an. Teil der Banachschen Exzentrität war gewiß seine Vorliebe, im Café zu arbeiten statt in der Universität, und zwar zuerst im Café Roma („He used to spend hours, even days there, especially towards the end of the month before the university salary was paid.“[4]) und dann, als die Kreditsituation im Roma prekär wurde, im Schottischen Café direkt gegenüber. Dort haben endlose mathematische Diskussionen stattgefunden, hauptsächlich zwischen Banach, Mazur[5] und Ulam („It was hard to outlast or outdrink Banach during these sessions“, schreibt letzterer), deren wesentliche Punkte in einer vom Kellner des schottischen Cafés verwahrten Kladde festgehalten wurden; bevor sie angeschafft wurde, schrieb man – sehr zum Ärger des Personals – direkt auf die Marmortische. Diese Kladde ist heute allgemein als „das Schottische Buch“ bekannt, es ist, mit einleitenden Artikeln von Mauldin als Buch herausgegeben worden. Im Schottischen Buch werden Probleme der Funktionalanalysis, der Theorie der reellen Funktionen und der Maßtheorie diskutiert; manche sind bis heute ungelöst geblieben. Für einige Probleme wurden Preise ausgelobt, die von einem kleinen Glas Bier über eine Flasche Wein bis hin zu einem kompletten Abendessen und einer lebenden Gans[6] reichten.

---

[2]Nach: D. Werner, Funktionalanalysis, 4. Auflage, Springer, Berlin, 2002, S. 42.

[3]D. Mauldin, The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café, Birkhäuser, Basel, 1981, S. 5.

[4]ebd. , S. 7

[5]sic! Eben jener.

[6]Enflo löste das entsprechende Problem 1973 und bekam dafür in Warschau eine lebende Gans überreicht.