Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Hans-Christian Kreusler

Wintersemester 2011/2012

Differentialgleichungen I

4.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 24. / 25. November

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $f : \mathbb{R} \times X \to X$ stetig.
Zeige:

(i) Ist f im zweiten Argument *linear beschränkt*, gibt es also Funktionen $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_0^+) \cap L^1(\mathbb{R})$, so daß für beliebige $(t, v) \in \mathbb{R} \times X$

$$\|f(t, v)\| \le \alpha(t) + \beta(t)\|v\|$$

gilt, so ist jede Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = u_0 \in X, & t_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

beschränkt.

(ii) Genügt f zusätzlich einer lokalen Lipschitzbedingung auf X, so ist das Anfangswertproblem (1) eindeutig lösbar.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Zeige, daß das AWP für die Integrodifferentialgleichung

$$\begin{cases} u'(t) = (Ku)(t), & t > 0, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

mit $(Ku)(t) := \int_0^t k(t-s)u(s)ds,\ k \in L^1(\mathbb{R})$, eindeutig lösbar ist.
Hinweis: Der Satz von Picard-Lindelöf ist nicht anwendbar. Weshalb nicht?

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Bestimme mit Hilfe der Methode der Reduktion der Ordnung die allgemeine Lösung des Systems

$$u'(t) + Au(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R},$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1/t & 1 \\ -1/t^2 & -2/t \end{pmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung ist $u_1(t) = (t^2, -t)^T$.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

(a) Das *MSC (2000)* (Mathematics Subject Classification) ist ein System zur Klassifizierung der mathematischen Fachgebiete, wobei jedem Gebiet eine Kombination aus fünf Ziffern und Buchstaben zugeordnet wird. Anhand dieses Codes kann recht leicht herausgefunden werden, in welche Gebiete ein Artikel oder ein Buch einzuordnen ist. Bei einem Artikel ist die MSC-Angabe meist am Anfang, nach dem Abstract, im Buch auf einer der ersten Seiten angegeben.

Welchen *MSC (2000)*-Code haben die folgenden mathematischen Themenbereiche?

(i) Theorie der Wellengleichungen
(ii) Nichtlineare Randwertprobleme
(iii) Theorie der Banach-Räume stetiger Funktionen
(iv) gewöhnliche Differentialgleichungen in Banach-Räumen

(b) Wo ist die in der Anekdote (Fußnote 6) des 3. Übungsblattes erwähnte Arbeit von Enflo zu finden? Gib die vollständige Referenz an, d. h. Name des (der) Autors (Autoren), Titel der Arbeit, Name des Journals, Nummer des Bandes/Heftes, Jahrgang und Seitenzahlen.

Zum Abschluß noch ein Zitat des großen Funktionalanalytikers (seines Zeichens also ein echter „Theoretiker“) Paul Halmos aus dem Jahre 1985:

> Mathematics is not a deductive science - that's a cliché. When you try to prove a theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial-and-error, experimentation, and guesswork.

Dem ist unbedingt zuzustimmen. Es sei trotzdem erwähnt, daß es bei Übungsaufgaben häufig durchaus hilfreich ist, sich die Voraussetzungen einmal aufzulisten...