Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Hans-Christian Kreusler

Wintersemester 2011/2012

Differentialgleichungen I

6.Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien 8. / 9. Dezember

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Sei X ein Banachraum und $f : \mathbb{R} \times X \to X$ stetig und genüge einer lokalen Lipschitz-bedingung bezüglich X. Es gelte weiterhin

$$f(-t, u) = -f(t, u), \quad t \in \mathbb{R}, u \in X.$$

Zeige: Ist u eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases}$$

auf einem Intervall $[-r, r]$, $r > 0$, so ist u gerade.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Wir betrachten in $X = \mathcal{C}([0, 1])$ das AWP

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

mit $(Av)(x) := \int_0^1 (\xi - x)v(\xi)d\xi$ für $v \in X$.
Zeige, daß der zugehörige Lösungsoperator durch

$$S(t) = e^{-tA} = I - \sqrt{12}\sin(\frac{t}{\sqrt{12}})A + 12\big(1 - \cos(\frac{t}{\sqrt{12}})\big)A^2$$

gegeben ist. (I bezeichnet die Identität in X.)
Hnweis: Man kann A^3 berechnen.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{L}(X)$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad t > 0,$$

wobei f eine stetige Funktion ist, die nicht schneller als exponentiell wächst, d.h. es gibt Konstanten $M > 0$, $t_0 > 0$ und $a > 0$, so daß

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Dann wächst keine Lösung dieser Differentialgleichung schneller als exponentiell, es gibt also für jede Lösung u Konstanten $K > 0$ und $b > 0$, so daß

$$|u(t)| \leq Ke^{bt} \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei H ein unendlich-dimensionaler, separabler Hilbertraum. Wir wollen zeigen, daß es eine stetige Abbildung der abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{B}(0,1)$ in sich gibt, welche keinen Fixpunkt besitzt, daß also der Brouwersche Fixpunktsatz im unendlichdimensionalen nicht gilt. Kakutani hat 1943 eine solche Abbildung konstruiert:

Sei hierzu $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von H. Jedes Element $u \in H$ läßt sich dann darstellen als eine verallgemeinerte Fourierreihe[1]

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e_n, \quad \alpha_n \in \mathbb{R}, .$$

Wir definieren eine Abbildung $S : H \to H$ durch

$$S(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e_{n+1}.$$

(i) Zeige, daß S linear und beschränkt (also stetig) ist.

(ii) Wir definieren nun die Abbildung

$$T(u) := \frac{1}{2}(1 - \|u\|)e_0 + S(u), \quad u \in \overline{B}(0,1).$$

Zeige, daß T stetig ist und $\overline{B}(0,1)$ in sich abbildet und weiter, daß T keinen Fixpunkt besitzt.

[1]Es gilt dann die *Parsevalsche Gleichung*: $\|u\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2$.