Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Hans-Christian Kreusler

Wintersemester 2011/2012

Differentialgleichungen I

7.Übungsblatt

Letztes Übungsblatt der ersten Semesterhälfte
Abgabe in den Tutorien 15. / 16. Dezember

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Untersuche die folgenden Funktionenmengen auf gleichgradige Stetigkeit sowie Kompaktheit bzw. relative Kompaktheit im Raum der stetigen Funktionen:

(i) $F := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{n}x(1-x)^n$, $x \in [0,1]$

(ii) $G := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(nx)$, $x \in [0,1]$

(iii) $H := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \exp(-x/n)$, $x \in [0,\infty)$

(iv) $K := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n\exp(-x/n)$, $x \in [0,1]$

Skizziere jeweils die Funktionenfolgen.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Wir wollen die (nichtlineare Fredholm-) Integralgleichung

$$u(x) = \lambda \int_a^b f(x,y,u(y))dy, \qquad x \in [a,b], \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

lösen. Es sei mit einem festen $r > 0$

$$f : \{(x,y,v) \in \mathbb{R}^3 : x,y \in [a,b], |v| \le r\} =: Q \to \mathbb{R}$$

stetig und

$$M := \max_Q |f(x,y,v)|.$$

Zeige: Falls $|\lambda| \le r/(M(b-a))$ ist, so hat die Gleichung (1) mindestens eine Lösung $u \in \mathcal{C}([a,b])$ mit $\|u\|_\infty \le r$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Beweise die folgende Form des Satzes von Arzelà- Ascoli.
Sei Z ein Banachraum und $A \subset Z$ kompakt. Sei X ein weiterer Banachraum. Zeige: Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}(A;X)$ ist genau dann relativ kompakt in $\mathcal{C}(A;X)$, wenn sie gleichgradig stetig ist und für jedes $t \in A$ die Menge

$$\mathcal{M}(t) = \{v(t) \in X : v \in \mathcal{M}\}$$

relativ kompakt in X ist.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

In unendlichdimensionalen Räumen reicht die Stetigkeit der rechten Seite im allgemeinen nicht aus, um die (lokale) Existenz einer Lösung des AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in [0, T], \\ u(t_0) = u_0, & t_0 \in [0, T], \end{cases}$$

zu gewährleisten. Das folgende Gegenbeispiel wurde in der Vorlesung angegeben.

Es sei $X = c_0$ der Raum der Nullfolgen, versehen mit der Supremumsnorm. Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), & t \in [0, T], \\ u(0) = u^0, \end{cases}$$

wobei die k-te Komponente von u^0 gegeben ist durch $u^0_k = 1/k^2$ und die k-te Komponente von $f(u)$ durch

$$f(u)_k := 2\sqrt{|u_k|}$$

für $u \in c_0$. Obgleich $f : c_0 \to c_0$ stetig ist, besitzt das AWP auf beliebig kleinen Intervallen um $t_0 = 0$ keine Lösung.
Hier nun die Aufgaben:

(i) Wieso ist auf dieses AWP der Satz von Picard-Lindelöf nicht anwendbar? (Zeige, daß $f : c_0 \to c_0$ zwar stetig is, aber keiner geeigneten Lipschitz-Bedingung genügt.)

(ii) Betrachte dieses AWP im Raum l^∞ der beschränkten Folgen. Ist nun der Satz von Picard-Lindelöf oder jener von Peano anwendbar[1]?

(iii) Betrachte dieses AWP nochmals im Raum l^∞ und bestimme unendlich viele Lösungen zur Anfangsbedingung $u^0 = (0, 0, \dots)$. Ist die Menge aller Lösungen kompakt?

[1]Hinweis: Zeige u.a., daß das Bild der beschränkten Menge der „Einheitsfolgen“ unter f nicht relativ kompakt ist.