Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Hans-Christian Kreusler

Wintersemester 2011/2012

Differentialgleichungen I

8.Übungsblatt

Erstes Übungsblatt der zweiten Semesterhälfte
Abgabe in den Tutorien 5. / 6. Januar

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Wir betrachten für $J = [0, \infty)$, $D = (0, \infty)$ das AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in J, \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

mit $f : J \times D \to \mathbb{R}$, $f(t, v) := -\frac{t}{v} \exp(t^2)$.
Bestimme eine maximal fortgesetzte Lösung dieses AWP. Ist diese eindeutig bestimmt?

Aufgabe 2: **4 Zusatzpunkte**

Wählt man im Satz von Osgood für die Funktion $\omega = \omega(z)$ z. B. die Funktionen

$$Lz,\ Lz|\ln\frac{1}{z}|,\ Lz|\ln\frac{1}{z}|\ \ln|\ln\frac{1}{z}|, \ldots,$$

so erhält man immer schwächere Einschränkungen an die rechte Seite $f = f(t, u)$. Zeige, daß es keinen „am meisten verschärften“ Satz dieser Art gibt. Zeige also, daß es zu einer den Voraussetzungen des Satzes genügenden Funktion ω immer eine Funktion ω_1 gibt, die ebenfalls den Voraussetzungen des Satzes genügt und die

$$\lim_{z \to 0} \frac{\omega(z)}{\omega_1(z)} = 0$$

erfüllt.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Wir wollen den folgenden Satz von Leray und Schauder beweisen[1].

> Es sei X ein Banachraum und $A : X \to X$ eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Gleichung
>
> $$u = Au, \quad u \in X \tag{1}$$
>
> eine Lösung, falls folgende *A-priori-Abschätzung* gilt:
>
> > Es gibt ein $r > 0$ derart, daß
> >
> > $$\|u\| \leq r$$
> >
> > für jede Lösung u der Gleichung
> >
> > $$u = tAu, \quad u \in X, \quad 0 \leq t < 1$$
> >
> > gilt[2].

Hierzu definieren wir die Menge $M := \{u \in X \,:\, \|u\| \leq 2r\}$ und die Abbildung

$$Bu := \begin{cases} Au & \text{für } \|Au\| \leq 2r, \\ \frac{2rAu}{\|Au\|} & \text{für } \|Au\| > 2r. \end{cases}$$

Zeige, daß B eine kompakte Abbildung der Menge M in sich ist. Folgere, daß es einen Fixpunkt für B geben muß und schließlich, daß dann auch eine Lösung von (1) existiert.

Benutze den Satz, um die Lösbarkeit des Problems

$$u(x) = \alpha \int_a^b \sin u(y) dy + f(x)$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a,b])$ im Raum $\mathcal{C}([a,b])$ zu zeigen.

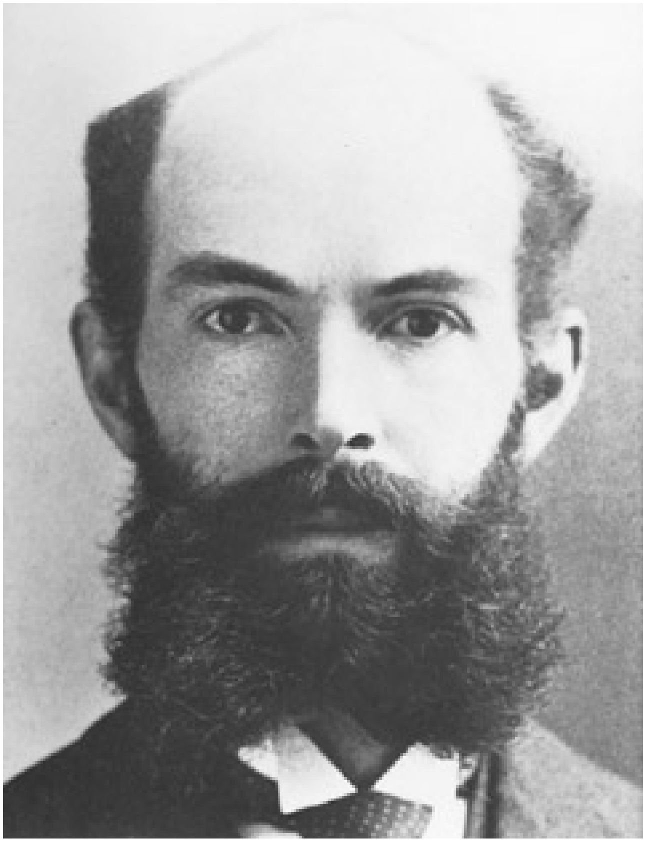
---

[1] Dies ist ein Beispiel des wichtigen Prinzips: *A-priori-Abschätzung gibt Existenz.*

[2] Bemerkung: Die Lösbarkeit der Gleichung $u = tAu$ wird nicht behauptet!

Aufgabe 4: **5 Punkte**

In der Vorlesung wurde der **Einzigkeitssatz** von Osgood angegeben. Dieser hat seinen Ursprung in der beigefügten Arbeit von Osgood aus dem Jahre 1898[3]. Formuliere den **Einzigkeitssatz** aus dieser Arbeit und skizziere den Beweis in unserer Sprache. (Wenn Begriffe benutzt werden, die nicht in der Vorlesung definiert wurden, so müssen diese erklärt werden.)



William Fogg Osgood

1864-1943

Frohe Weihnachten!

[3] W. F. Osgood. *Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ *ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung.* Monatsh. f. Math. 9, 331 - 345, 1898