Tutoriumsaufgaben zur Differentialgleichung I
1. Tutorium

Aufgabe 1
Gibt es eine DGL, die nirgendwo (klassisch) lösbar ist, d.h. eine DGL, die auf beliebigen (offenen) Intervallen von keiner differenzierbaren Funktion erfüllt werden kann?

Aufgabe 2
Eine logistische Differentialgleichung ist von der Form

$$\begin{cases} y'(x) = \alpha(K - y(x))y(x) & x > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

mit $\alpha, K > 0$, $y_0 \geq 0$. Diese Differentialgleichung beschreibt einen Wachstumsprozess.

1. Vergleiche die Differentialgleichung mit einem exponentiellen Wachstum
2. Überlege, wie die Lösung verläuft, OHNE die Differentialgleichung zu lösen. Welche Funktionen haben α und K?
3. Löse das AWP.

Aufgabe 3
Verwende den Exponentialansatz um zwei linear unabhängige Lösungen der DGL $u'' + u = 0$ zu finden und beweise die lineare Unabhängigkeit.

Aufgabe 4
Löse die Anfangswertprobleme bzw. DGLs

$$(a) \begin{cases} y'(x) = 2xy(x)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} y'(x) = y(x)\tan(x) - 2\sin(x), & x < \frac{\pi}{2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y'(x) = \cos^2(x + y(x)) - 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$(d) \quad y''(x) - \frac{2}{(1+x)^2}y(x) = 0, \quad x > -1.$$

Lösungen Teil 1

Aufgabe 1

z.B. $y'(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Aufgabe 2

1. Exponentieller Wachstum $y' = \alpha y$

   Logistisches -"- $y' = \alpha (K-y) y$

   $\Rightarrow$ Wachstumsgeschwindigkeit abhängig von y

   $(K-y)$ beschreibt Sättigung, $K \mathrel{\hat{=}}$ Sättigungsgrenze

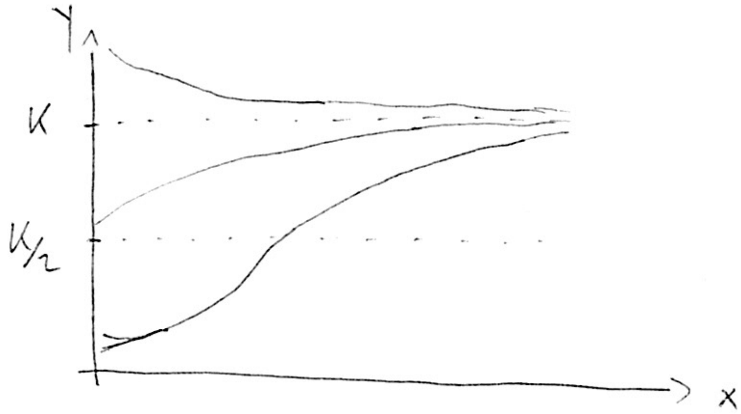
   α beeinflusst Wachstumsgeschwindigkeit

2. $y' = 0 \Leftrightarrow y = 0$ oder $y = K$

   $y' < 0$ falls $y > K$

   $y' > 0$ falls $0 < y < K$

   $y'' = \alpha y' (K - 2y) \Rightarrow$ Wendepunkt bei $y = K/2$



"Skizze"

3. Trennung der Veränderlichen

$$\frac{dy}{dx} = \alpha (K-y) y$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y(K-y)}\, dy = \alpha \int dx$$

NR: $\frac{1}{y(K-y)} = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y} \right) \frac{1}{K}$ (Partialbruchzerlegung)

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}\, dy = K\alpha \int dx$$

Und somit $\ln\left(\frac{y}{K-y}\right) = K\alpha x + c$ oder $\ln\left(\frac{K-y}{y}\right) = -K\alpha x + c$

$$\swarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$y = (K-y) e^{K\alpha x} c \qquad\qquad K - y = y\, e^{-K\alpha x} c$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$y = \frac{K e^{K\alpha x} c}{1 + e^{K\alpha x} c} \qquad\qquad y = \frac{K}{1 + e^{-K\alpha x} c}$$

...

$\Downarrow$ $y(0) = y_0$

$$c = \frac{K}{y_0} - 1$$

Aufgabe 3

e-Ansatz liefert $u_1(t) = e^{it}$, $u_2(t) = e^{-it}$.

Sei $a\, u_1(t) + b\, u_2(t) = 0$

$\Rightarrow a(\cos t + i \sin t) + b(\cos(-t) + i \sin(-t)) = 0$

$\Rightarrow (a+b)\cos t + i(a-b)\sin t = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} t = 0: & \Rightarrow a + b = 0 \\ t = \frac{\pi}{2}: & \Rightarrow a - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 0 \text{ u. } b = 0$$

Aufgabe 4

a) $\frac{dy}{dx} = 2xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y^2}\,dy = 2x\,dx$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = x^2 + c \qquad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{c - x^2}$$

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

b) $y' - \tan x \; y = -2\sin x\,, \qquad x < \frac{\pi}{2}$

Duhamel:

$$y(x) = \exp\left(+\int_0^x \tan z\,dz\right)\cdot 2 + \int_0^x \exp\left(\int_s^x \tan z\,dz\right)(-2\sin s)\,ds$$

$$= \exp(-\ln\cos x)\cdot 2 + \int_0^x \exp(-\ln\cos x + \ln\cos s)(-2\sin s)\,ds$$

$$= \frac{2}{\cos x} - \frac{2}{\cos x}\int_0^x \cos s \cdot \sin s\,ds$$

$$= \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{\cos x}\left[\cos^2 s\right]_{s=0}^{x} = \frac{2}{\cos x} + \cos x - \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + \cos x$$

c) Substituiere $z = x + y$

$\Rightarrow \quad z' = 1 + y' = 1 + \cos^2(z) - 1 = \cos^2(z)$

Löse $z' = \cos^2(z)$:

$$\int \frac{1}{\cos^2(z)}\,dz = \int dx \qquad \Rightarrow \quad \tan(z) = x + c$$

$$\Rightarrow \quad z = \arctan(x + c)$$

Resubstituiere:

$$y = x - z = \arctan(x + c) - x$$

$$y(0) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \arctan(c) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

d) Erste Lösung "sehen": $y_1(x) = \frac{1}{1+x}$ $\qquad x > -1$

Zweite Lösung mit d'Alembert.

$$y_2(x) = \frac{1}{1+x} \int_0^x v(z)\,dz$$

$$\Rightarrow y_2'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \int_0^x v(z)\,dz + \frac{1}{1+x} v(x)$$

$$\Rightarrow y_2''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \int_0^x v(z)\,dz - \frac{1}{(1+x)^2} v(x) - \frac{1}{(1+x)^2} v(x) + \frac{1}{(1+x)} v'(x)$$

$$= \frac{2}{(1+x)^3} \int_0^x v(z)\,dz - \frac{2}{(1+x)^2} v(x) + \frac{1}{1+x} v'(x)$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$y_2''(x) - \frac{2}{(1+x)^2} y_2(x) = -\frac{2}{(1+x)^2} v(x) + \frac{1}{1+x} v'(x) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow v'(x) = \frac{2}{1+x} v(x)$$

$$\Rightarrow v(x) = e^{2\int_0^x \frac{1}{1+z} dz} = e^{2\ln(1+x)} = (1+x)^2$$

und somit $y_2(x) = \frac{1}{1+x} \int_0^x (1+z)^2\,dz = \frac{1}{1+x}\left(\frac{(1+x)^3}{3} - \frac{1}{3}\right)$

$$= \frac{(x+1)^2}{3} - \frac{1}{3(x+1)}$$

Insgesamt ~~ist~~ hat die Lösung die Form

$$y(x) = A\,y_1(x) + B\,y_2(x) \quad , A, B \in \mathbb{R}.$$